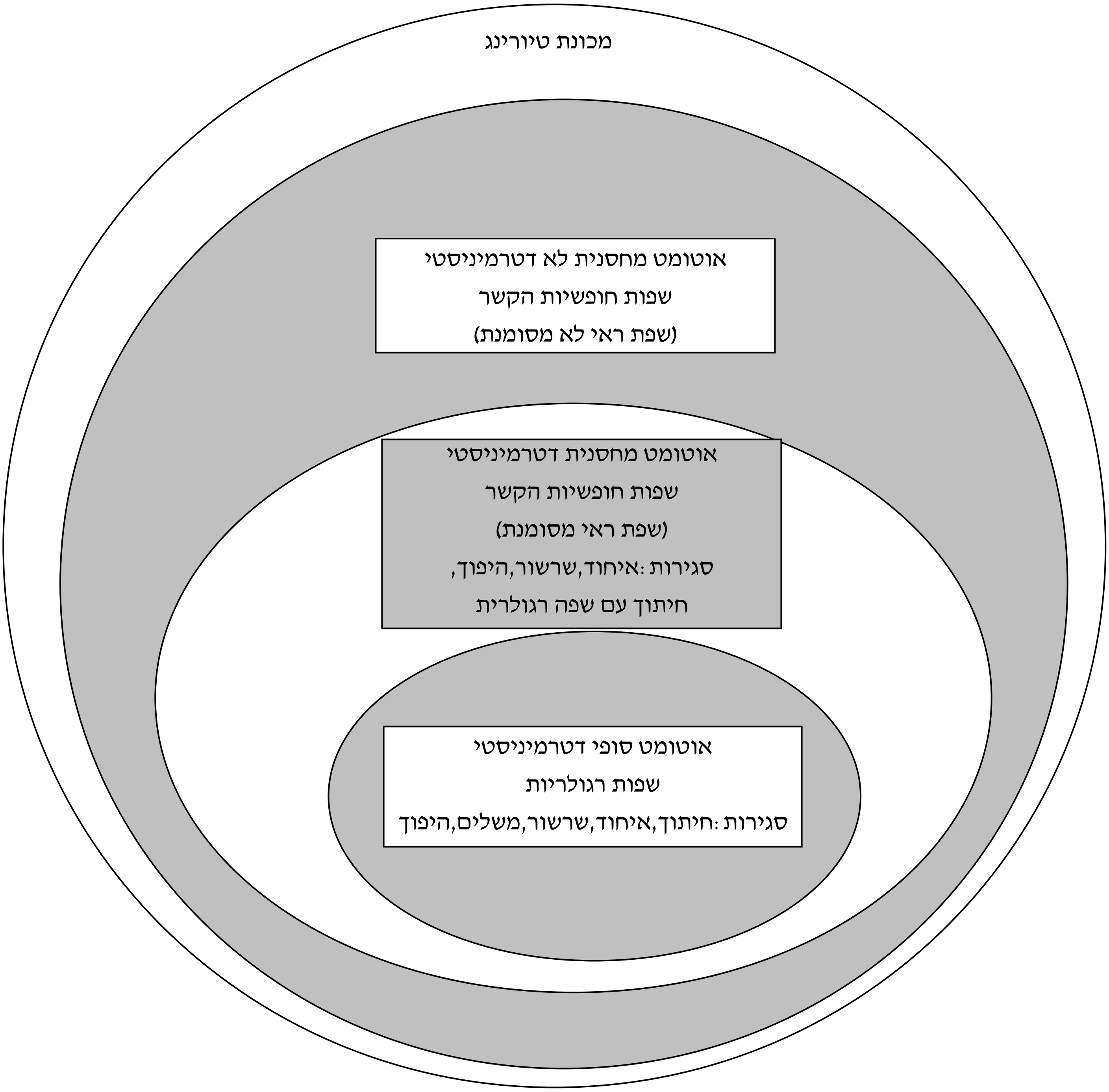

מכונת טיורינג
אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי
שפות חופשיות הקשר
(שפת ראי לא מסומנת)
אוטומט מחסנית דטרמיניסטי
שפות חופשיות הקשר
(שפת ראי מסומנת)
סגירות :איחוד,שרשור,היפוך,
חיתוך עם שפה רגולרית
אוטומט סופי דטרמיניסטי
שפות רגולריות
סגירות :חיתוך,איחוד,שרשור,משלים,היפוך

השימוש בספר זה הינו חופשי בשנת 2011-2012.
לגבי שנת הלימודים הבאה תינתן הודעה בתחילת השנה
(ספטמבר 2012)

כמו כן אשמח לקבל תגובות הערות תוספות ותיקונים
haimav@zahav.net.il או vp01335@netvision.net.il

תודה מראש לכל מי שהכללתי שאלות ופתרונות שלו.
כל מי שרואה עצמו נפגע מכך נא לשלוח לי מייל.

הקדמה

הנושא מודלים חישוביים הינו נושא הנלמד גם במסגרת לימודים על תיכוני. לימוד הנושא במוסד אקדמי כולל הרחבה של הנושא מעבר לתוכנית הלימודים בתיכון. הספר שלהלן מקיף את רוב תוכנית הלימודים לפי הנחיות משרד החינוך.

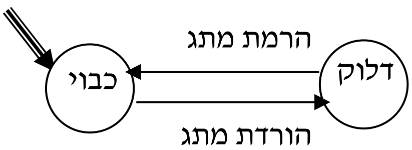
הסבר המושגים בויקיפדיה נעשה באופן מדעי/אקדמי וכאמור מכיל הרחבה של תוכנית הלימודים למרות זאת מומלץ לעיין בו.

אס"ד אוטומט סופי דטרמיניסטי

http://he.wikipedia.org/wiki/אוטומט_סופי

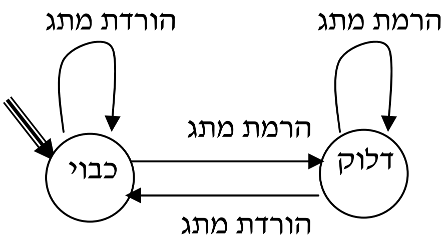
אוטומט הינו כלי/מכונה/ציור שמטרתו לתאר שינוי מצב כתוצאה מפעולה/קלט/אירוע כלשהו.
(בהמשך נרחיב את הגדרת האוטומט)

דוגמא 1: אם אנו במצב "רעב" אזי לאחר שנאכל נעבור למצב "שבע".
החץ מסמן את המצב שהינו נקודת ההתחלה/מוצא שלנו.
בעיגולים נרשם מצב עכשווי וליד החיצים נרשמים האירועים.

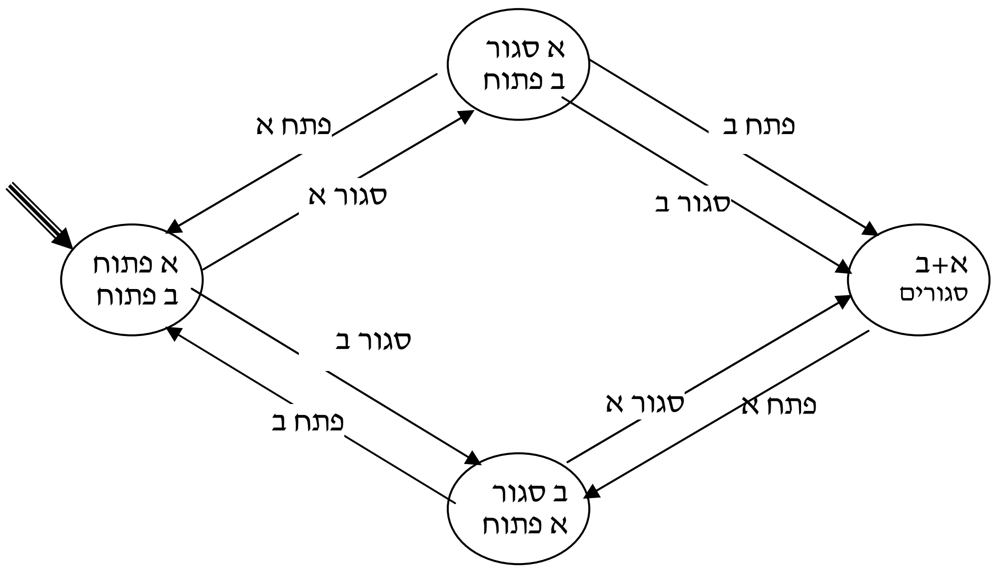


דוגמא 2: מנורה כבויה תדלק באם נרים את המתג ותכבה כאשר נוריד.
מצב התחלתי-המנורה כבויה.

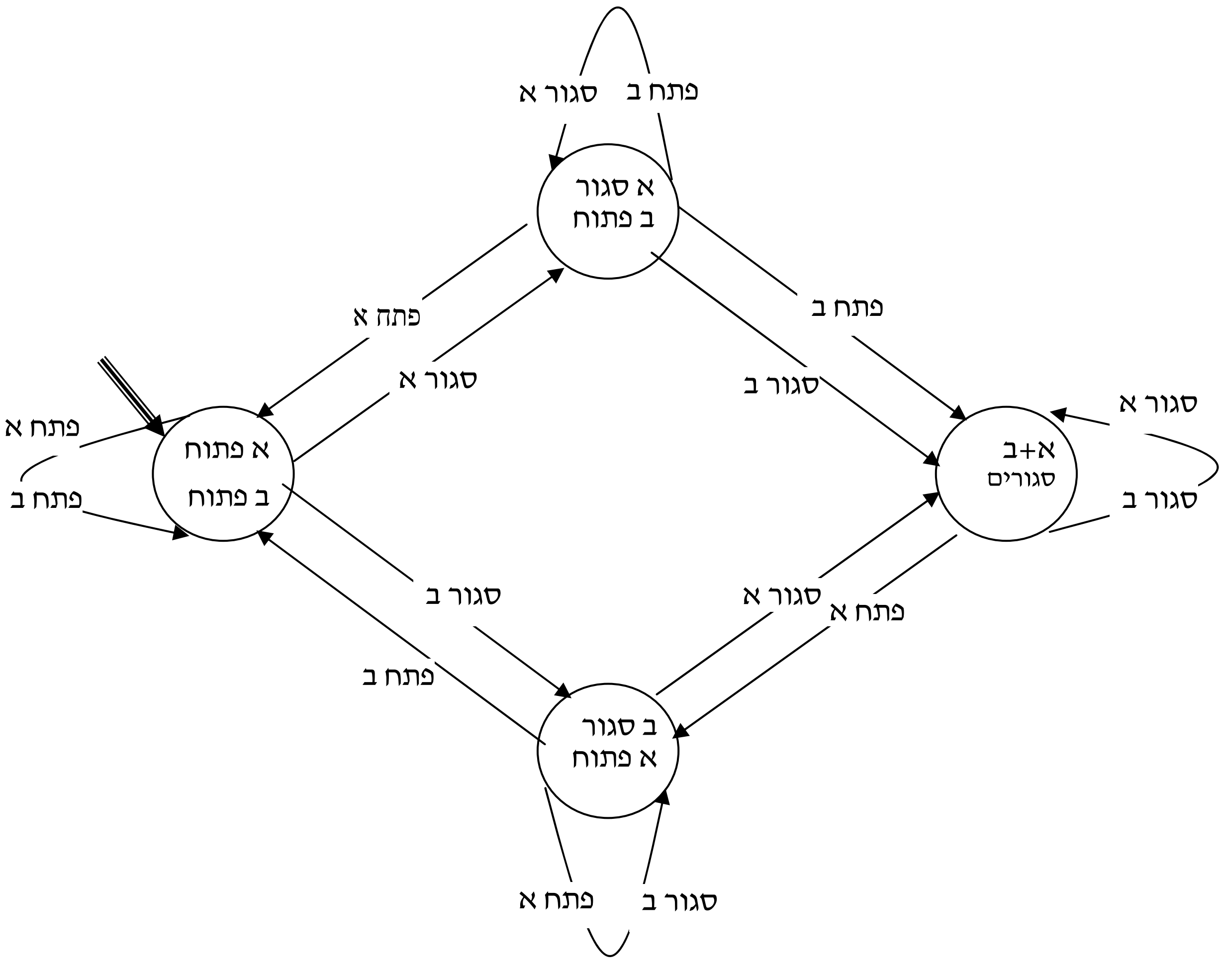
מה קורה כאשר המתג מורם ואנו מנסים להרים אותו
או כשהוא מורד ואנו מנסים להוריד אותו



דוגמא 3 : נתונה דלת שבה שני מנעולים. מספיק שאחד המנעולים יהיה במצב סגור על מנת שלא תפתח. במצב התחלתי הדלת פתוחה כלומר שני המנעולים פתוחים.

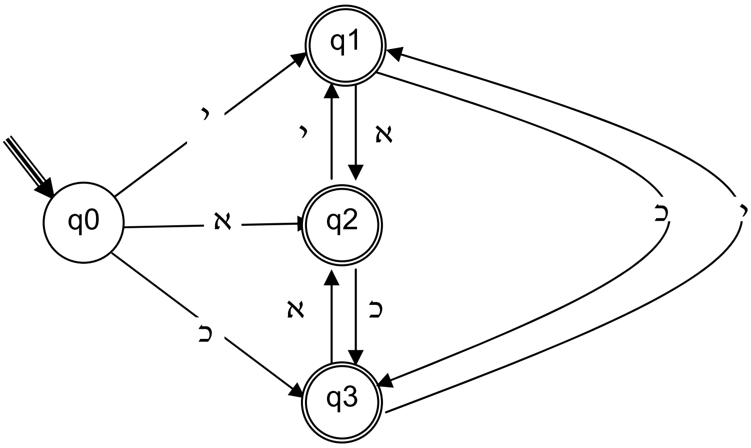


כמובן שניסיון לפתוח מנעול כלשהו במצב ההתחלתי ישאיר אותנו באותו מצב ובאופן דומה שאר המצבים



לעיתים אנו רוצים להבדיל בין המצבים. חלקם יהיו מצבים מקבלים ("מצב טוב") וחלקם לא.

דוגמא 4: מחרוזת מורכבת מחרוזים בצבעים א (אדום) כ (כחול) וי (ירוק). מחרוזת נחשבת לתקינה אך ורק אם אין שני חרוזים צמודים מאותו צבע ואורכה לפחות אחד (מכילה לפחות חרוז אחד)..

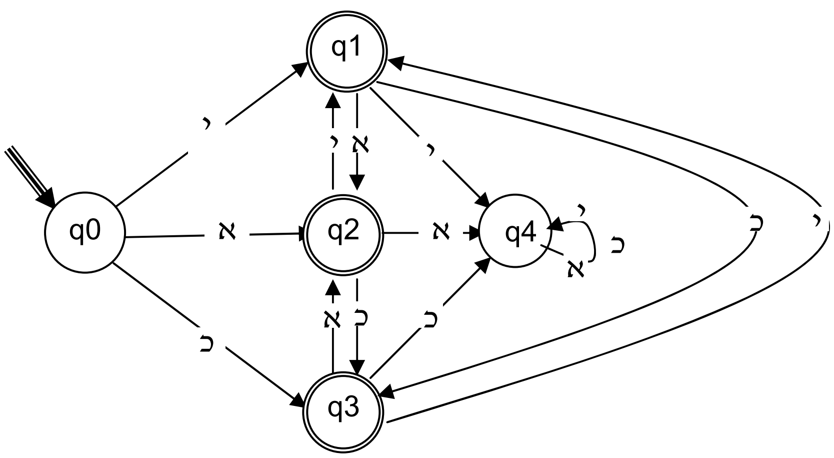


שימו לב: החץ מסמן את נקודת ההתחלה שמקובל לסמנה כ q0 . האוטומט שנבנה סורק את המחרוזת מתחילתה(משמאל לימין). עיגול כפול פירושו מצב מקבל ובמקרה שלנו מחרוזת תקינה. באוטומט שלעיל שלושה מצבים מקבלים.

בואו נבצע ***מעקב על המחרוזת/מילה*** הבאה משמאל לימין : יאיכאיכ

עובר למצב	צבע חרוז נבדק	נמצא במצב
q3	יאיכאיכ	q0
q1	יאיכאיכ	q3
q2	יאיכאיכ	q1
q3	יאיכאיכ	q2
q1	יאיכאיכ	q3
q2	יאיכאיכ	q1
q1	יאיכאיכ	q2

שימו לב שאם נתונה מחרוזת לא תקינה כגון : יי אנו נתקעים ולא יודעים להיכן ללכת עבור ה י השנייה. ולכן יי אינה מחרוזת תקינה. האוטומט אינו שלם. ניתן להשלים אותו.



הוספנו את המקרים שבהם יש יי או כב או אא המובילים אותנו למצב לא מקבל שממנו לא ניתן להגיע למצב מקבל. מצב זה נקרא מלכודת.

בואו נבצע מעקב על המחרוזת/מילה הבאה - משמאל לימין : **יאייכאיכ**

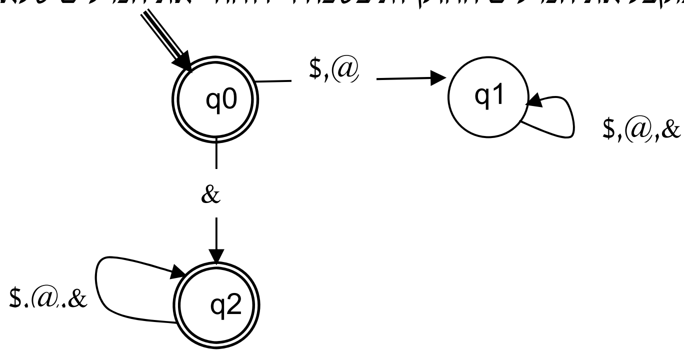
עובר למצב	צבע חרוז נבדק	נמצא במצב
q3	אייכאי**כ**	q0
q1	אייכא**י**כ	q3
q2	אייכ**א**יכ	q1
q3	איי**כ**איכ	q2
q1	אי**י**כאיכ	q3
q4	א**י**יכאיכ	q1
q4	**א**ייכאיכ	q2

הגענו למצב לא מקבל כיוון שהופיע י פעמיים ברצף.

מילה/שפה

שימו לב !! נפגשנו פה בפעם הראשונה עם המושג מילה. מילה הינה מחרוזת של סימנים שכל סימן מעביר אותנו מצב. (כמובן שיתכן שנישאר באותו המצב או נעבור למצב חדש).
שפה הינה הגדרה של אילו מילים מתקבלות ואילו אינן מתקבלות. למשל לגבי המחרוזת עם הצבעים הגדרת השפה L תהיה : שפת כל המילים מעל {י,א,כ} שאסור שיופיעו שני תווים זהים ברצף. (נובע כמובן שגם שלושה או ארבעה ברצף אסור שיופיעו).

דוגמא 5 : נתונה שפה המורכבת מהאותיות &, @,$ בלבד. כל המילים המתקבלות בשפה מתחילות ב & ואורך המילה לא מוגבל. צייר אוטומט שמקבל את המילים החוקיות בשפה ו"דוחה" את המילים שלא מתקבלות.

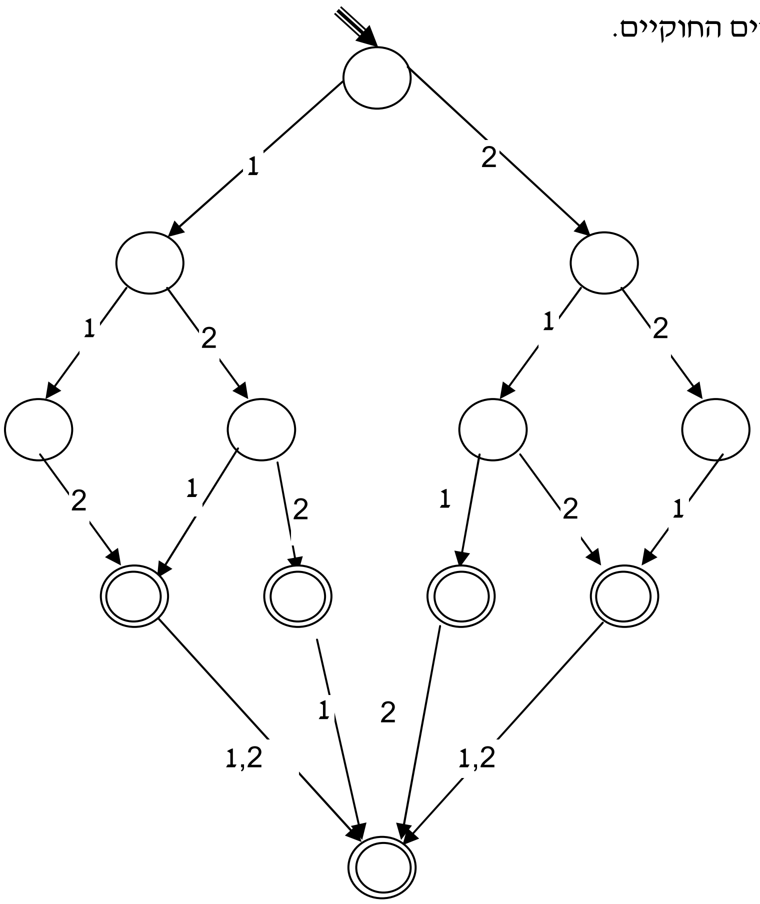


!!!! כל מצב (עיגול) הינו בעל משמעות. למשל באוטומט שבדוגמא 4 q1 "אומר" **אסור** שאחרי ההגעה אלי יהיה הצבע ירוק כי לפני היה ירוק. באופן דומה q2 וצבע אדום ו q3 וצבע כחול.

באוטומט הנוכחי q2 פירושו שהמילה התחילה ב & ולכן כל המשך תקני ואילו q1 פירושו שהמילה התחילה ב @ או $ ולכן כל המשך אינו תקני.

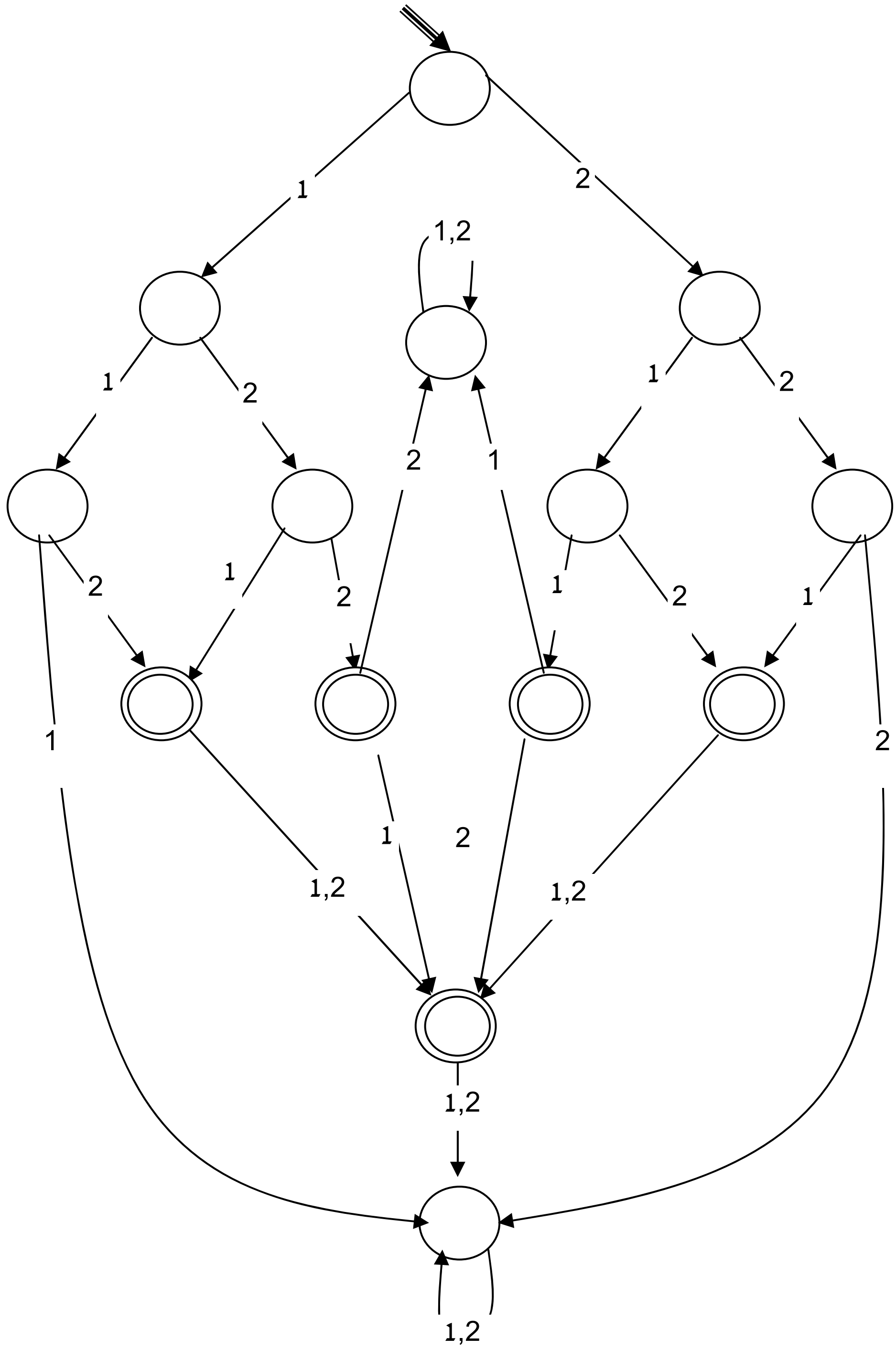
בכל אוטומט עלינו לציין מהן אותיות השפה. כלומר מהו ה א"ב של השפה. באוטומט הקודם {י,כ,א} המייצגים את הצבעים ירוק כחול אדום בהתאמה. באוטומט הנוכחי האותיות {$,@,&}.

דוגמא 6 : ליעל תא בבית הספר בו היא מחזיקה את ספרי הלימוד ודברים נוספים. הקוד למנעול הינו באורך 3 או 4 ומורכב מהספרות 1,2 בלבד. כמו כן אסור שהקוד יכיל רצף באורך שלוש של אותו המספר. צייר אוטומט שמקבל את הקודים החוקיים.



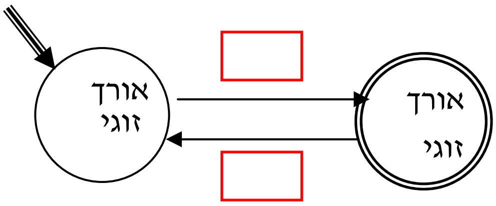
האוטומט אינו שלם. כלומר כל המעברים שאינם יכולים להגיע למצב מקבל הושמטו.

האוטומט השלם

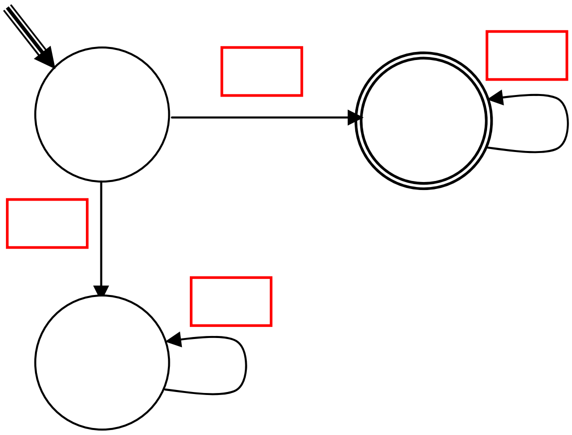


השלם (כתוב בריבועים את אותיות השפה המתאימות)

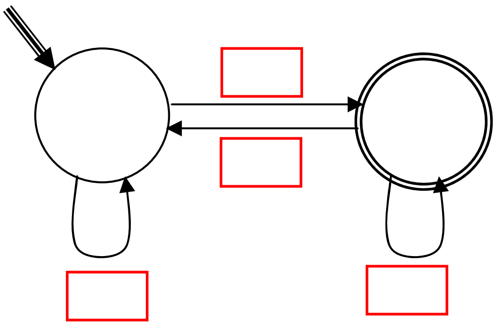
בנה שפה מעל {a,b} המקבלת את
כל המילים בעלות אורך אי-זוגי



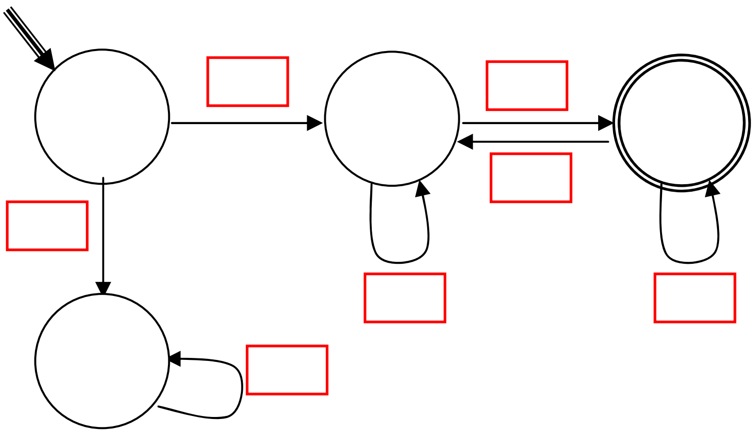
בנה שפה מעל {a,b} המקבלת את
כל המילים המתחילות ב a



בנה שפה מעל {a,b,c} המקבלת
את כל המילים שמספר ה a ים +
מספר ה b ים אי-זוגי

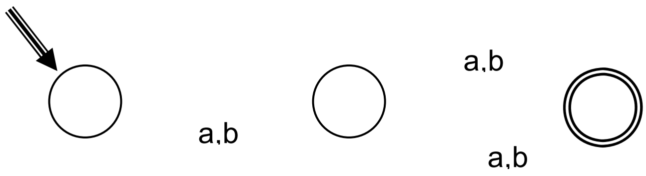


בנה שפה מעל {a,b} המקבלת את
כל המילים המתחילות ב a
ומסתיימות ב b

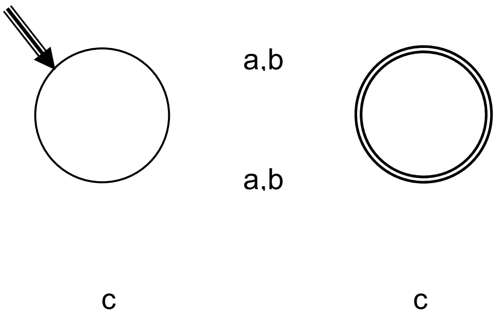


השלם את המעברים(החיצים,קשתות)

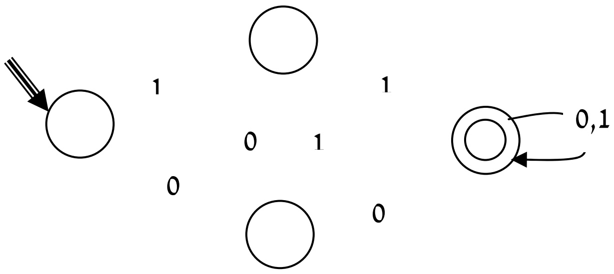
בנה שפה מעל {a,b} - כל המילים
בעלות אורך זוגי שאורכן גדול מ 1



בנה שפה מעל {a,b,c} המקבלת
את כל המילים שמספר ה a ים +
מספר ה b ים אי-זוגי



בנה שפה מעל {0,1}
המכילה 00 או 11



סיכום

ראינו שאוטומט הינו "מכונה"/"מכשיר" המתארת מה קורה עבור קלט (מילה) נתון תוך כדי סריקתו משמאל לימין.
ישנם אוטומטים בהם כל מצב הינו מצב תקין. למשל כיבוי או הדלקת נורה, אך אנו נעסוק בעיקר באוטומטים שלא כל קלט(מילה) חוקי ולכן באוטומט יהיו מצבים מקבלים ומצבים לא מקבלים כמו המחרוזת המורכבת מחרוזים. לכל אוטומט יש נקודות התחלה והקשתות(חיצים) והמידע שרשום עליהם אומרים לנו להיכן לעבור בכל שלב. מידע זה נקרא פונקצית המעברים. כמו כן לכל אוטומט יש את ה א"ב שלו דהיינו מה ניתן לרשום ליד הקשתות.

מהדוגמאות שראינו עד עתה ניתן לראות כי אוטומט מורכב ממספר אבני יסוד.
תיאור מתמטי פורמאלי של אוטומט A הוא באמצעות החמישייה הבאה:

$$A = \{Q, \sum, \delta, Q_0, F\}$$

כאשר:

Q	היא קבוצת מצבי האוטומט.	(העיגולים)
$\sum$	הוא א"ב הקלט.	(נכתב ליד הקשתות)
δ	היא פונקצית המעברים.	(הקשתות המכוונות והרשום לידן).
q_0	הוא המצב ההתחלתי.	(מסומן גם על ידי חץ)
$F \subseteq Q$	היא קבוצת המצבים המקבלים שהינה חלק מקבוצת כל המצבים.	(העיגולים כפולים)

שפה שניתן לבנות לה אס"ד הינה שפה רגולרית

לכל אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ניתן לבנות אוטומט דטרמיניסטי

מונחים (הדפס דף זה)

- Σ הא"ב של השפה. דוגמאות : $\Sigma=\{a,b,c\}$ $\Sigma=\{0,1,a\}$
- מילה מעל שפה הינה סדרה סופית של אותיות מתוך Σ מקובל לסמן אותה w .
- אוסף המילים מעל א"ב של שפה מסומן כ $\sum^*$
- **אורך של מילה:** האורך של מילה שווה למס' האותיות שבה. אורכה של מילה w

  מסומן ב $|w|$.

  לדוגמה : w=abbac אזי |w| הינו 5.
- נסמן ב ε את המילה הריקה. | ε| שווה אפס. (לעיתים רשומה כ e)
- **מס' מופעי אות במילה:** מספר מופעי a במילה w יסומן ב $\#_a(w)$.

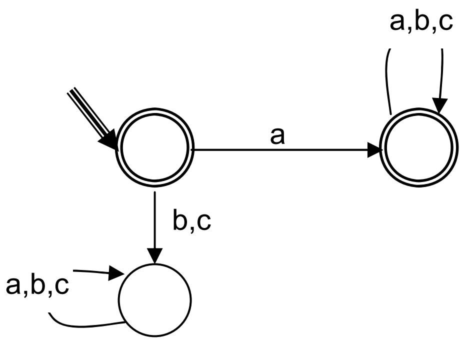
  דוגמה: $\#_a(baabbab)=3$
- השפה הריקה מסומנת כ Ø היא רגולרית(היא אינה מכילה את המילה הריקה).
- $L = \{ w \in (a,b)^* \mid \#_b(w) = \#_a(w) \}$ פירושו ש L הינה שפה מעל (a,b) כך

  שמספר ה a ים במילה שווה למספר ה b ים במילה.

  הסימן | פירשו "כך ש" .
- a^3 שווה aaa a^n שווה n פעמים a . a^0 פירושו המלה הריקה
- $\sum^*$ פירושו לגבי L כל המילים האפשריות ב א"ב הנתון כולל המילה הריקה.
- $\sum^+$
- מלכודת של מצב מקבל הינו מצב שאומר שכל המשך שהוא המילה תתקבל.

ומלכודת של מצב שאינו מקבל הינו מצב שאומר שכל המשך שהוא המילה לא תתקבל.

דוגמה : כל המילים מעל {a,b,c} המתחילות ב a.



[הגדרת המונחים בויקיפדיה]

עצות לבניית אוטומט סופי

1. עיין תחילה בדוגמאות הפתורות שבהמשך.

2. בנה תחילה את המסלול למילה הקצרה ביותר המתקבלת בשפה.

3. בדוק האם המילה הריקה מתקבלת בשפה.

4. הבדל בין המקרים של מתחיל מכיל או מסתיים.

5. אס״ד הינם ראשי התיבות של אוטומט סופי דטרמיניסטי.

6. באם הפתרון הינו אוטומט סופי דטרמיניסטי שלם ראה שכל מצב מטפל בכל קלט אפשרי פעם אחת בלבד.

7. כאשר יש דרישה למשל שמספר ה a ים במילה ($\#_a(w)$.) שארית חלוקה בשלוש תהיה ... אזי שים לב שאין מעגל של a-ים שאינו כפולה של שלוש בפתרון.

8. אם הפתרון מורכב מתנאים של ״מקיים תנאי א וגם תנאי ב״ או ״מקיים תנאי א או תנאי ב״ נלמד בהמשך איך ניתן לפרק את הבעיה ולבנות את הפתרון באמצעות אוטומט מכפלה.

9. בתחילה, פתרון תרגיל דורש זמן ומחשבה אך בהמשך לאחר פתרון תרגילם מסוגים שונים דרכך תהיה קלה יותר.

10. שימו לב שיכול להיות יותר ממצב מקבל אחד.

11. באוטומט סופי דטרמיניסטי שימו לב שמכל מצב יש יציאה של כל אותיות ה א״ב של השפה.

12. אם אין דרישה לאוטומט דטרמיניסטי אזי לעיתים פתרון לא דטרמיניסטי הינו פשוט יותר. (אוטומט לא דטרמיניסטי יוסבר בהמשך).

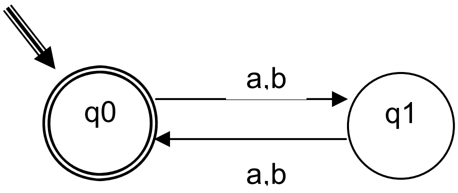
13. לכל אוטומט לא דטרמיניסטי ניתן לבנות אוטומט דטרמיניסטי.

פתרונות למספר תרגילים

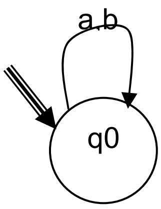
(עיין בפתרונות ורשום מה מייצג כל מצב)

למשל בדוגמה הבאה מייצג q0 את המילים בעלות אורך זוגי ומצב q1 מייצג את המילים בעלות אורך אי-זוגי.

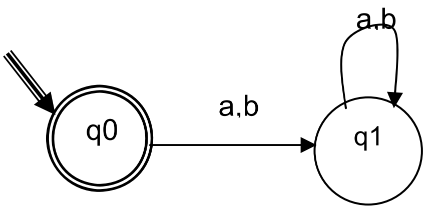
מעל {a,b} - כל המילים בעלות
אורך זוגי כולל המילה הריקה



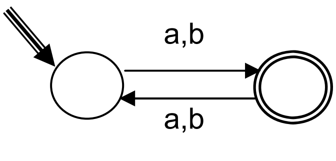
מעל {a,b} - אף מילה לא מתקבלת
(זוהי השפה הריקה)



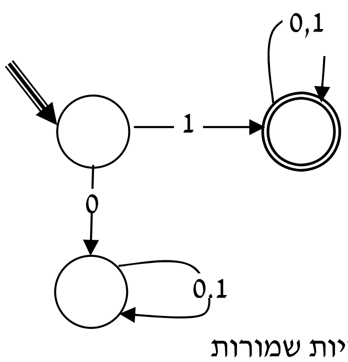
מעל {a,b} - רק המילה הריקה מתקבלת



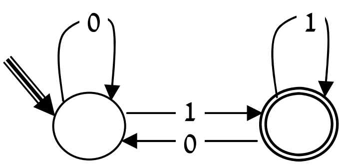
מעל {a,b}
כל המילים בעלות אורך אי זוגי



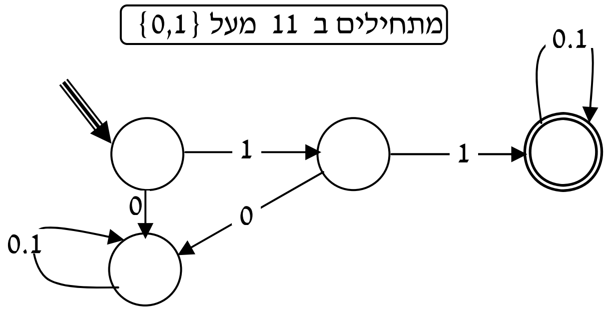
מתחילים ב 1 מעל {0,1}



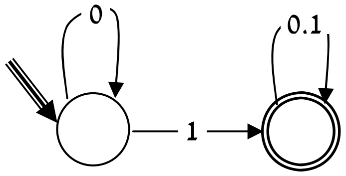
מסתיים ב 1 מעל {0,1}



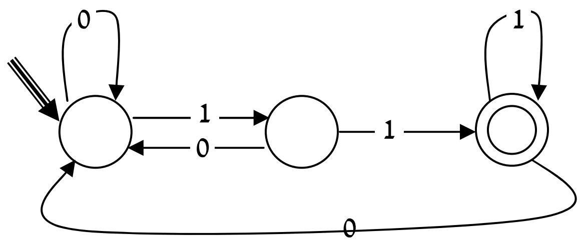
מתחילים ב 11 מעל {0,1}



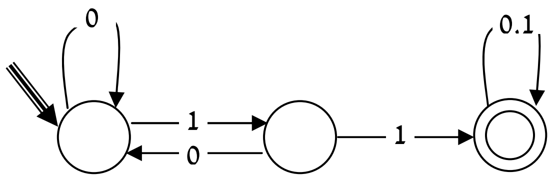
מכיל 1 מעל {0,1}



מסתיימים ב 11 מעל {0,1}

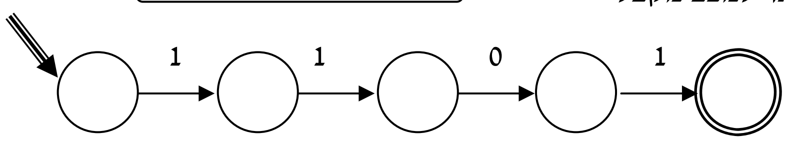


מכילים 11 מעל {0,1}

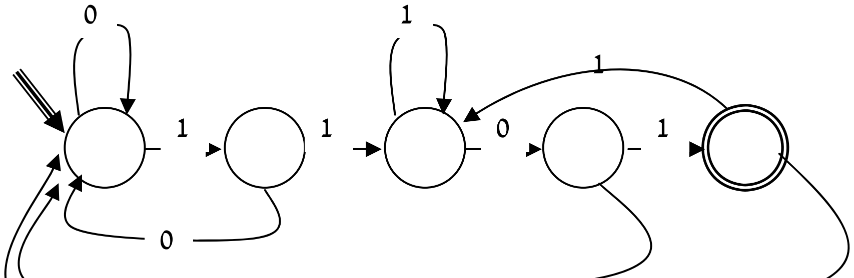


מסתיימים ב 1101 {0,1}

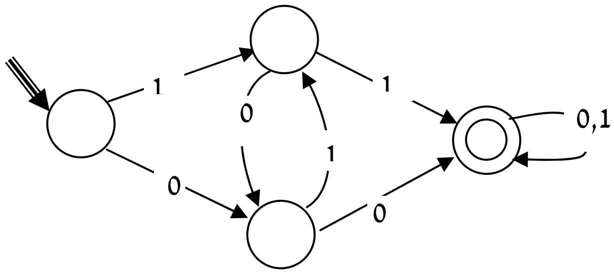
בנית השרשרת הקצרה ביותר למצב מקבל



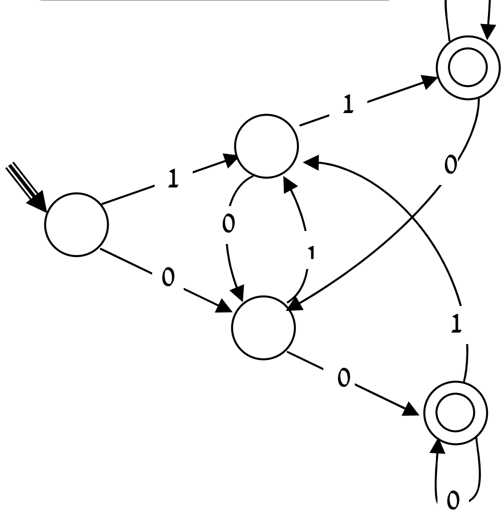
השלמת השאר



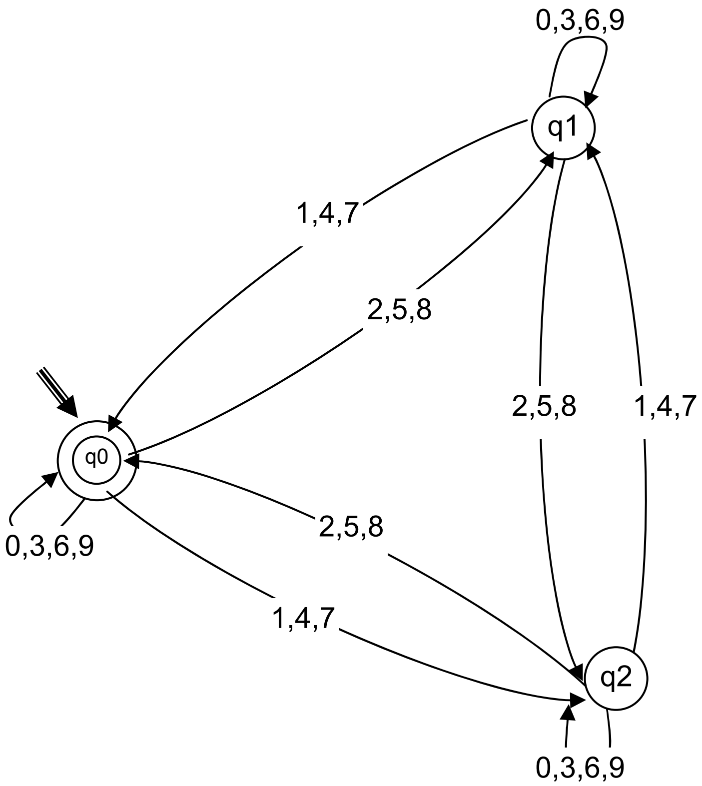
מכיל 00 או 11 {0,1}



מסתיימים ב 00 או 11 {0,1}



מספר דצימלי המתחלק
בשלוש ללא שארית



בצע מעקב אחר המילה 172437

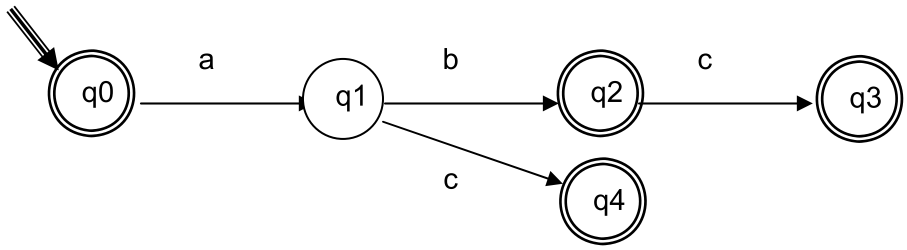
רשום מה מאפיין כל מצב
q0 שארית חלוקה ב 3 שווה 0
q1
q2

שפה שמספר המילים בה סופי

שים לב שמספר המילים בשפות שטיפלנו בהם עד עכשיו הינו אינסופי.

בנה אוטומט מעל {a,b,c} כך ש L={e,ab,ac,abc} (שים לב שמספר המילים בשפה הינו 4)

e הינה המילה הריקה

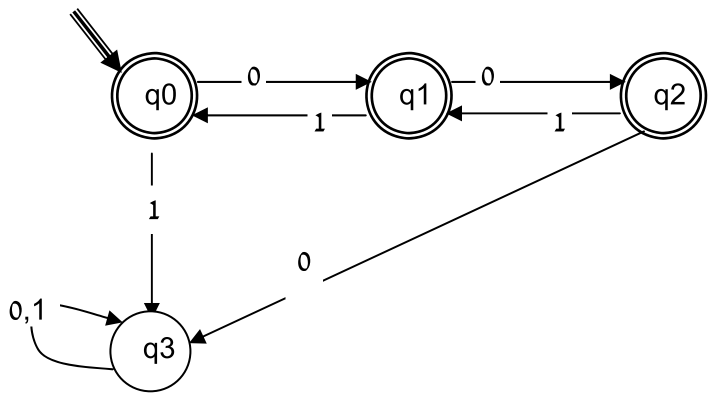


ברור שתמיד ניתן לבנות אוטומט לשפה שמספר המילים בה סופי.

(שים לב שהאוטומט אינו שלם למשל מהמצב q0 אין יודעים מה לעשות כאשר יש לנו b או c –הסבר בהמשך)

תרגיל (קשה)

נתון האוטומט הבא מעל הא"ב {0,1} :



א. הגדר אילו מילים מתקבלות)

ב. הגדר תפקיד כל מצב.

פתרון

א. חייב להתקיים שעבור כל נקודה בקלט(רישא של המילה) $0 \le \#_0(w) - \#_1(w) \le 2$

ובמילים פשוטות מספר האפסים במילה פחות מספר ה 1 במילה צריך להיות בין 0 ל 2 (כולל) לכל רישא של המילה.

ב.

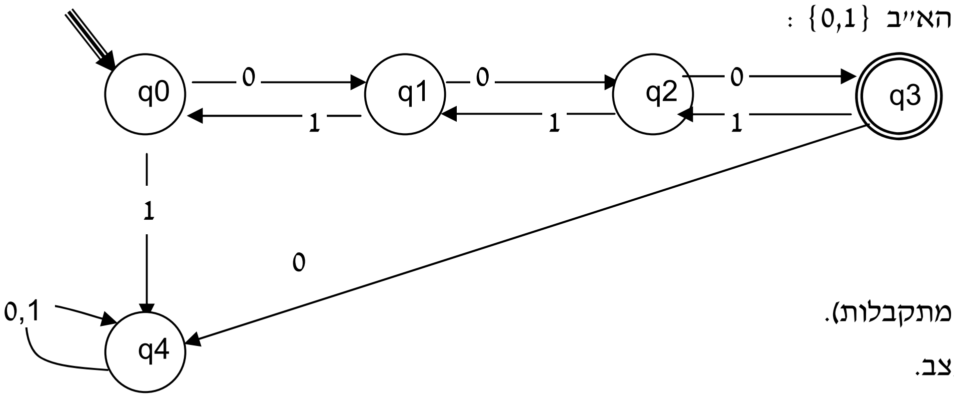
q0 $0 \le \#_0(w) - \#_1(w) = 0$

q1 $0 \le \#_0(w) - \#_1(w) = 1$

q2 $0 \le \#_0(w) - \#_1(w) = 2$

תרגיל

נתון האוטומט הבא מעל הא״ב {0,1} :



א. הגדר אילו מילים מתקבלות).

ב. הגדר תפקיד כל מצב.

תרגיל

נתונה השפה הבאה $L= a^nWb^m \quad n=m \% 2$

W היא מילה מעל {a,c} המתחילה ב-c, מסתיימת ב-a ולא מכילה את הרצף aac.

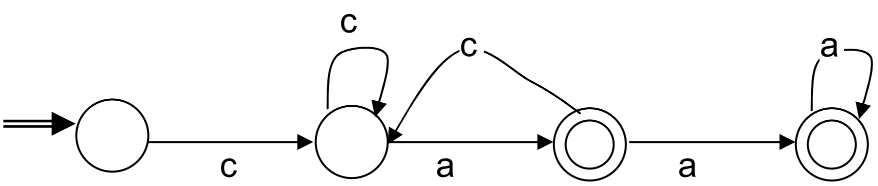
א. תן 2 דוגמאות שונות למילים בשפה.

ב. בנה אוטומט סופי לשפה.

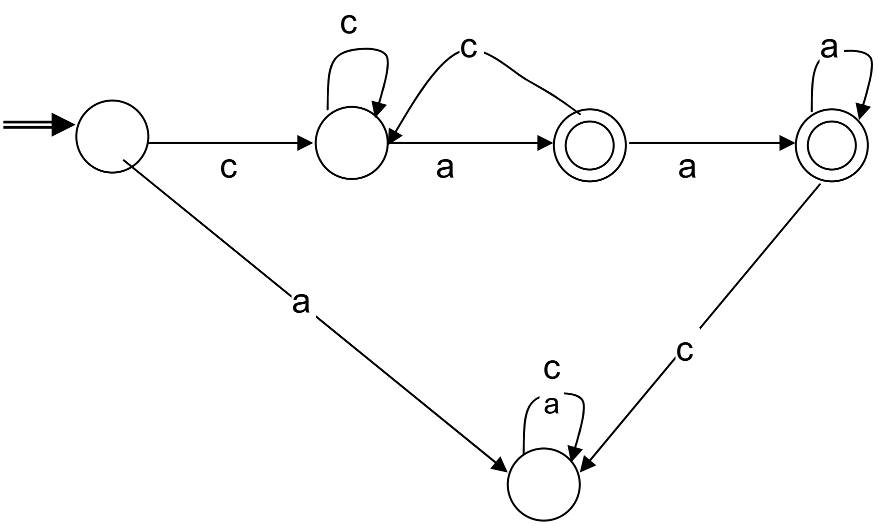
פתרון

נבנה תחילה את W כלומר מילה מעל {a,c} המתחילה ב-c, מסתיימת ב-a ולא מכילה את הרצף aac.

פתרון ל W דטרמיניסטי אך לא מלא



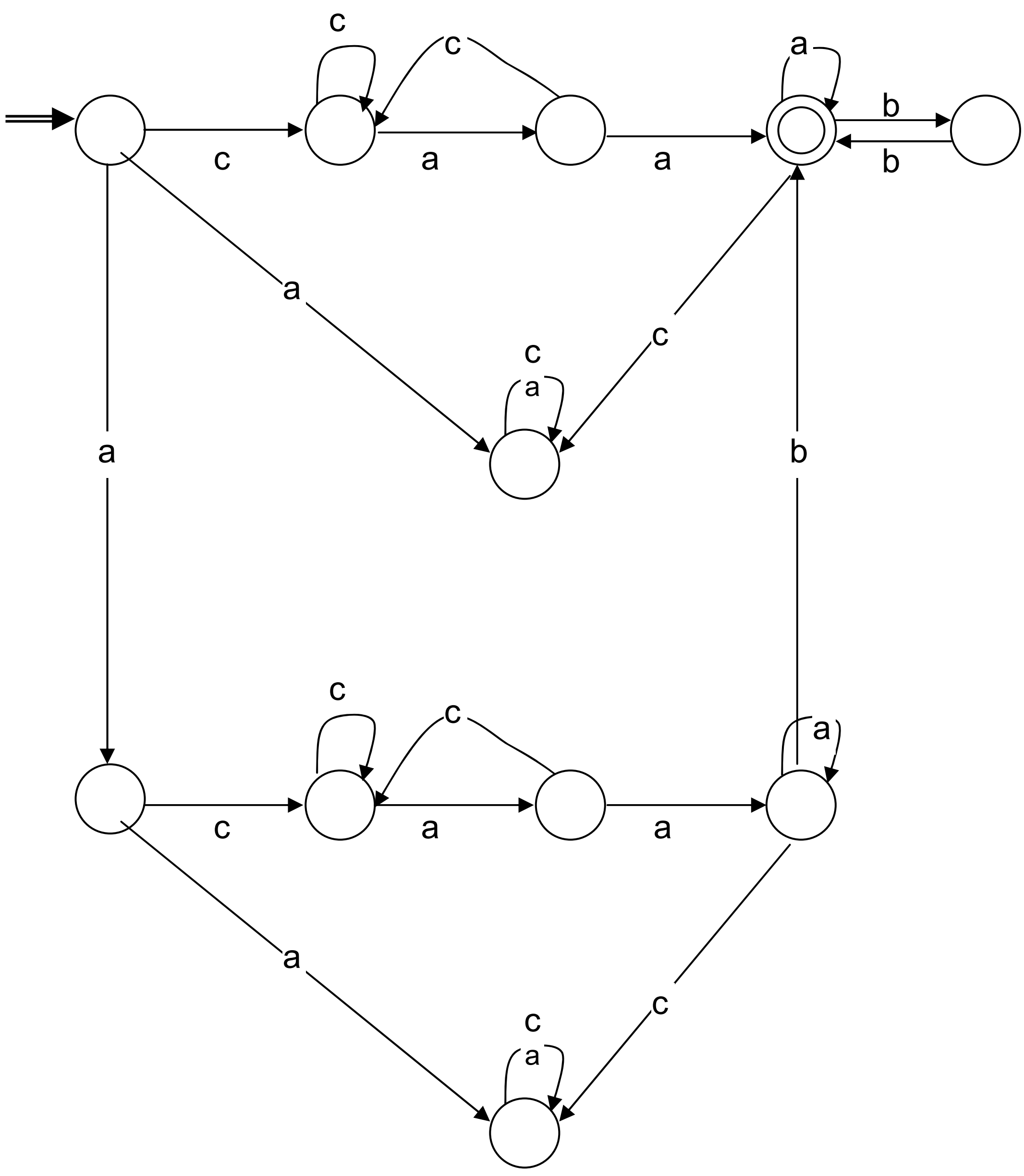
פתרון ל W דטרמיניסטי ומלא



עתה ניגש לפתרון הכולל.

מספר ה a ים בהתחלה יכול להיות 0 או 1 בלבד. ולכן פשוט נחלק לשני מקרים.

האחד בו מתחילה W מיד והשנייה בה יש a בודד. ובשניהם נוסיף b ים תוך שמירה על הזוגיות.



אס"ד תרגילים

1. בנה אוטומטים לשפות הבאות מעל {0,1} כאשר התנאי על מילה בשפה הינו :

א. מתחיל ב 1	ב. מסתיים ב 1
ג. מכיל 1	ד. מתחיל ב 11
ה. מסתיים ב 11	ו. מכיל 11
ז. מתחיל ב 101	ח. מתחיל 1011
ט. מכיל 1011	י. מסתיים ב 1011
יא. מסתיים ב 11011	יב. מתחיל ב 1 ומסתיים ב 1
יג. מכיל 00 או 11	יד. מכיל 10 או 01
טו. מספר 0 זוגי וגם מספר 1 זוגי	טז. מספר 0 + מספר 1 זוגי כולל מילה ריקה
יז. אורך אי זוגי.	יח. אורך זוגי כולל המילה הריקה.
יט. אורך התו האחרון זוגי.	כ. אורך התו האחרון אי זוגי.
כא. אורך זוגי לא כולל המילה הריקה.	כב. אורך זוגי ומסתיים ב 0.
כג. מכיל 00 וגם 11	כד. מכיל 012 או 011 או 02
כה. אינו מכיל 11.	כו. מתחיל ב 11 או 22 ואינו מסתיים ב 2.

2. בנה אוטומטים לשפות הבאות מעל {0,1,2} :

א. 2211 אינו מופיע כתת מחרוזת ו 1100 מופיע כתת מחרוזת אחרונה במילה. 1100212 מתקבל ו 0110012 או 11002211 לא מתקבל.
ב. המקבל מילים המסתיימות ב 10 או 01 ו 2 יכול להופיע רק ברצף בהתחלה.
ג. המקבל מילים המסתיימות ב 00 או 11 ואין בהן רצף של 22.
ד. אורך זוגי מסתיים ב 0 (גם המילה הריקה מתקבלת).
ה. אורך אי זוגי מסתיים ב 1.
ו. אורך זוגי מסתיים ב 1.
ז. אורך אי זוגי מסתיים ב 0.

3. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{a,b,c\}$:

א. מתחיל ב a ומסתיים ב b
ב. מספר ה b זוגי ומספר ה a אי זוגי
ג. אות לפני אחרונה a
ד. אסור רצף באורך שניים.
ה. אסור רצף באורך שלוש.
ו. כל המילים שאחרי כל מופע של a אם יש מופיע מיד רצף של שלש אותיות b
ז. אורכן זוגי ושאין בהן תת מילה aa
ח. שארית חלוקת מספר ה a בשלוש שווה 1
ט. תת המחרוזת aba מופיעה בדיוק פעמיים

4. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{a,b\}$:

א. a^nb^m $m \geq 1$ $m \geq 0$
ב. a^nb^m $m \geq 0$ $m \geq 1$

5. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{a,b,c\}$:

א. $a^nb^mc^k$ $k,m,n \geq 0$
ב. $a^nb^mc^k$ $k,m,n \geq 1$
ג. $a^nb^mc^k$ $m,n \geq 1$ $k \geq 0$
ד. $a^nb^mc^k$ $n,k \geq 1$ $m \geq 0$

6. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{a,b\}$:

א. $L=\{bab,ba,a,e\}$
ב. a^nb^m $m = n \bmod 3$ (שקול לומר $|b| = |a| \bmod 3$)
ג. a^nb^m $m \bmod 3 = n \bmod 3$ (שקול לומר $|b \bmod 3| = |a| \bmod 3$)
ד. אורך זוגי ואין רצף aa

7. מיוחדים

א. מס׳ בינאריים המתחלקים ב 5 ללא שארית $\{0,1\}$
ב. מספר שלם המתחלק ב 3 ללא שארית $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

8. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{0,1,2\}$:

א. בנה אוטומט סופי שיקבל את כל המחרוזות המסתיימות ב 10 או 01 ו 2 יכול להופיע רק ברצף בהתחלה.
ב. כל המילים המסתיימות ב 00 או 11 ואין בהן רצף של 22.

9. בנה אס״ד לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\{0,1\}$:

א. כל המילים שבהן אורך התו האחרון זוגי.
ב. כל המילים שבהן אורך הרצף האחרון זוגי(גדול מ 0) ואסור שיתחילו ב 0
ג. רצף כלשהו באורך 2 או באורך 1 שחוזר על עצמו. דוגמה : 010101 1010 1111
ד. כל המילים שבהן אורך התו האחרון זוגי.

תאור אוטומט באמצעות טבלה

ניתן לתאר אוטומט באמצעות טבלה.

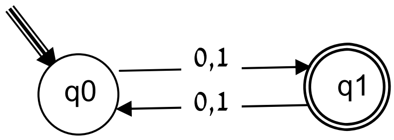
אות נבדקת	
עובר ל	נמצא ב

להלן מספר דוגמאות.

כל האוטומטים מעל $\{0,1\}$ מצב מובלט עם קו מתחת הינו מצב מקבל.

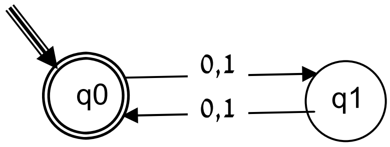
אורך מילה אי זוגי

1	0	
q1	q1	q0
q0	q0	**q1**



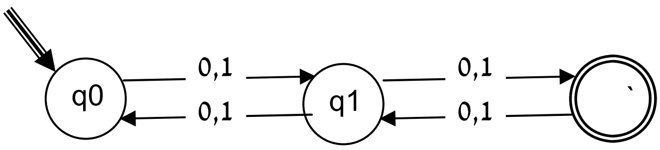
אורך מילה זוגי (כולל מילה ריקה)

1	0	
q1	q1	**q0**
q0	q0	q1



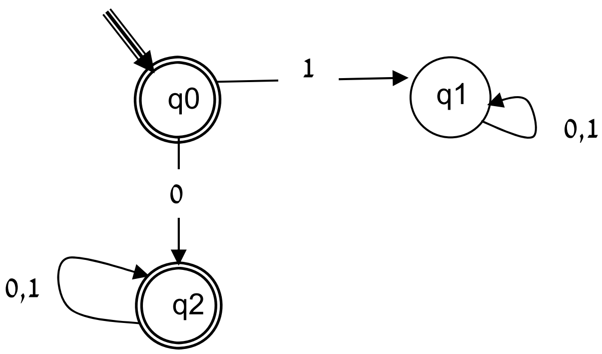
אורך מילה זוגי (לא כולל מילה ריקה)

1	0	
q1	q1	q0
q2	q2	q1
q1	q1	**q2**

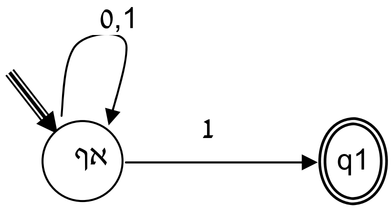


מתחיל ב 0 ומכיל את המילה הריקה

1	0	
q1	q2	**q0**
q1	q1	q1
q2	q2	**q2**



אוטומט לא דטרמיניסטי/אוטומט לא שלם



האוטומט שמשמאל אינו דטרמיניסטי כיוון שמ q0

עבור הקלט 1 ניתן או לעבור ל q0 או ל q1.

כמו כן האוטומט אינו שלם כיוון שמ q1 אין אנו יודעים להיכן ללכת עבור קלט 0 או 1.

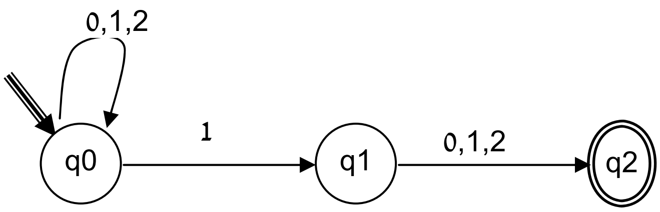
האוטומט מקבל את כל המילים מעל {0,1} המסתיימות ב 1.

הכלל הינו שאם קיים מסלול עבור מילה שמוביל למצב מקבל המילה מתקבלת.

לכל אוטומט לא דטרמיניסטי ניתן לבנות אוטומט דטרמיניסטי השקול לו.

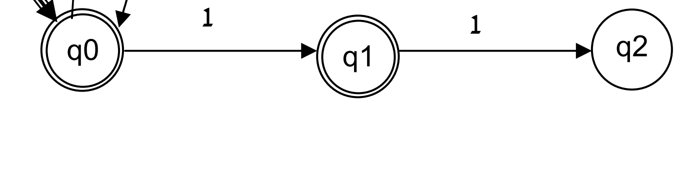
(כלומר שמקבל את אותם המילים ואותם בלבד) .

דוגמה נוספת



האוטומט מקבל את כל המילים מעל {0,1,2} שהאות לפני האחרונה הינה 1.

לעומת זאת שימו לב שאין זה נכון לומר על האוטומט הבא שהוא מקבל מילים שאינן מסתיימות ב 11 .



תרגילים נוספים באוטומט סופי

תרגיל

בנה אוטומט סופי לא דטרמיניסטי עבור השפות הבאות מעל $\{0,1,2\}$

א) האות האחרונה שווה לראשונה.

ב) האות האחרונה לא הופיע קודם במילה.

ג) האות לפני האחרונה שווה לאות הראשונה.

תרגיל (קשה)(ראה פתרון 1)

נתונה השפה הבאה n שווה לשארית חלוקת m ב 2 $\quad a^nWb^m \quad m\geq n \quad m>0$

W היא מילה מעל $\{a,c\}$ המתחילה ב-c, מסתיימת ב-a ולא מכילה את הרצף aac.

א. תן 2 דוגמאות שונות למילים בשפה.

ב. בנה אוטומט סופי לשפה.

תרגיל

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי אשר מקבל את השפה הבאה מעל הא״ב$\{0,1\}$

אוסף המילים המתחילות ב 1 , מכילות מספר זוגי של אפסים ומסתיימות ב 11.

(הערה : המילה 11 מתקבלת בשפה זו)

תרגיל

נתונה השפה הבאה $\quad a^nb^mc^j \quad n \% 3=0 \quad 0=m \% 3 \quad j=n\%3$

בנה אוטומט לשפה.

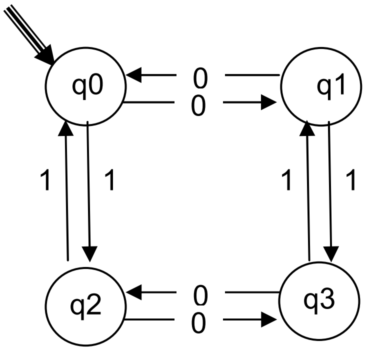
תרגיל

בנה אס״ד, המקבל את כל המילים מעל הא״ב $\{a,b\}$, המכילות

לפחות 2 אותיות a ומספר אותיות ה – b בהן מתחלק ב – 2.

תרגיל

עבור כל מצב שבאוטומט לו היה מצב מקבל מהי השפה המתקבלת.



פתרון

א. מספר אפסים זוגי   מספר אחדים זוגי.

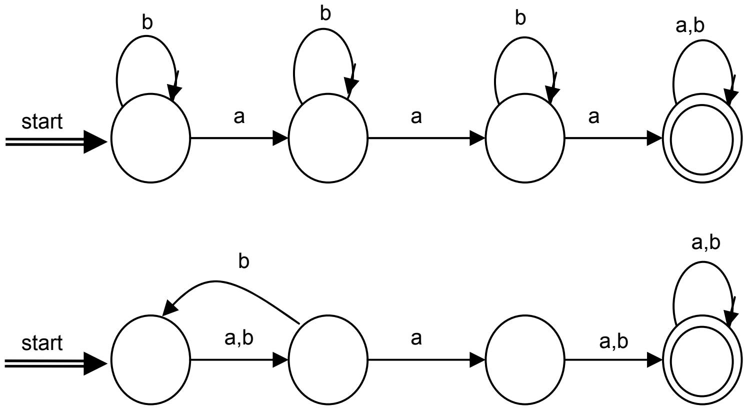
ב. מספר אפסים זוגי   מספר אחדים אי זוגי.

ג. מספר אפסים אי זוגי   מספר אחדים אי זוגי.

ד. מספר אפסים אי זוגי   מספר אחדים זוגי.

תרגיל

נתונים שני האוטומטים (סופיים דטרמיניסטים) הבאים מעל { a,b }



א. בדוק עבור שני האוטומטים האם המילים הבאות מתקבלות :

(1) abaaa (2) abbaba (3) aaaaba

ב. הסבר במילים מהי השפה המתקבלת עבור האוטומט <u>הראשון</u> .

ג. עבור שתי הטענות הבאות, אם הטענה נכונה - הסבר מדוע, ואם אינה נכונה - הבא דוגמא נגדית (דוגמא שסותרת את הטענה).

(1) כל מילה המתקבלת באוטומט השני מתקבלת גם באוטומט הראשון.

(2) כל מילה המתקבלת באוטומט הראשון מתקבלת גם באוטומט השני.

תרגיל

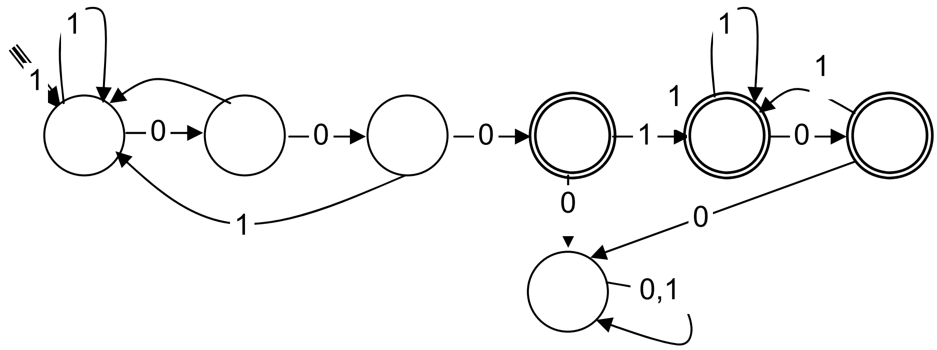
תאר באמצעות גרף אוטומט סופי דטרמיניסטי שיקבל את כל המחרוזות מעל א״ב {0,1} המקיימת את שני התנאים :

- מופיעה בהן 000 כתת מחרוזת בדיוק פעם אחת.
- אין בהן כלל מופעים של 00 פרט לאלה שבמופע של 000.

דגמה : המחרוזות 0110100011101 ו 000111101 תתקבלנה

המחרוזות 0101011 ו 100011001 לא תתקבלנה

פתרון

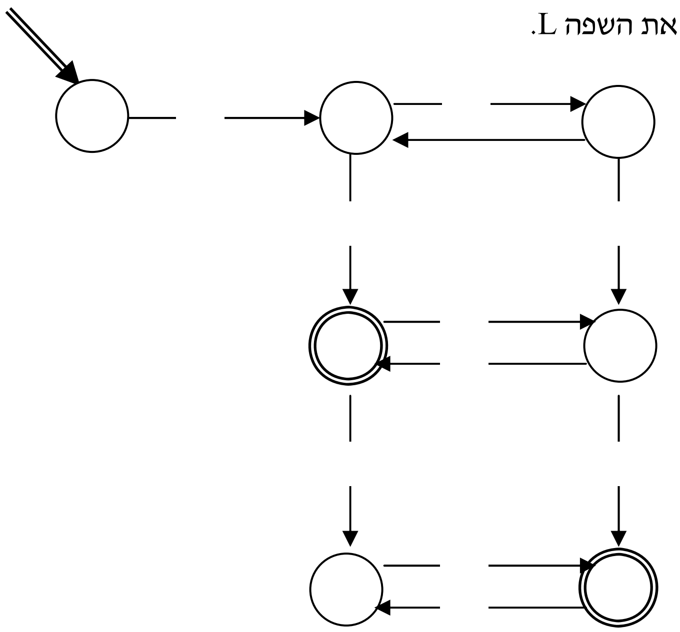


תרגיל

לפניך השפה L מעל הא״ב $\{a,b\}$

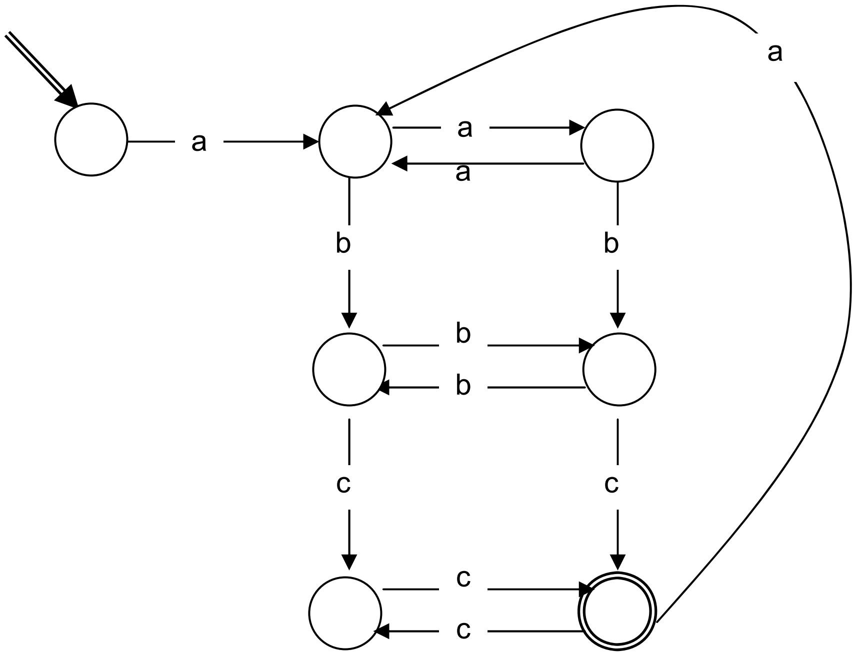
$$L=\{a^m b^n a^k \mid n,m>0 \quad k\geq 0 \quad m+n+k \text{ זוגי}\}$$

השלם את פונקצית המעברים באוטומט כך שיקבל את השפה L.



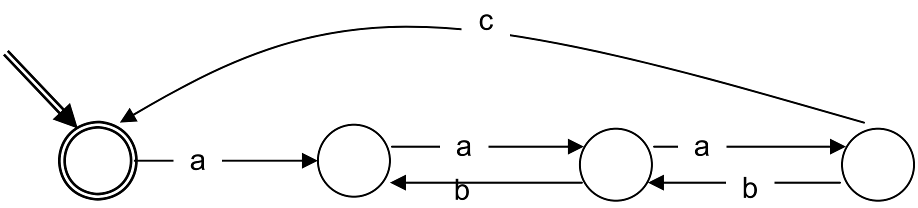
תרגיל

מה השפה המתוארת באוטומט הבא?



תרגיל*(קשה)*

מה השפה המתקבלת על ידי האוטומט (הלא מלא) הבא?

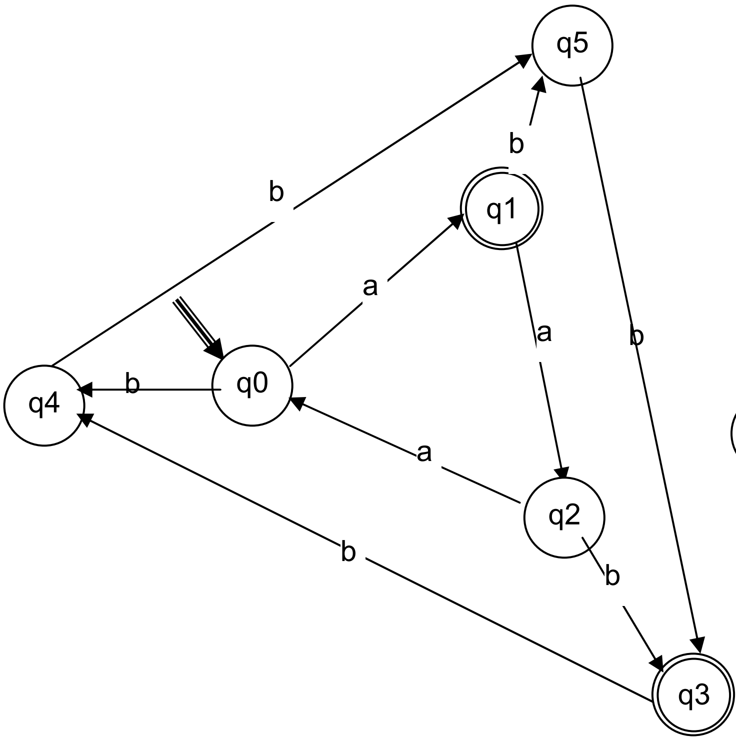


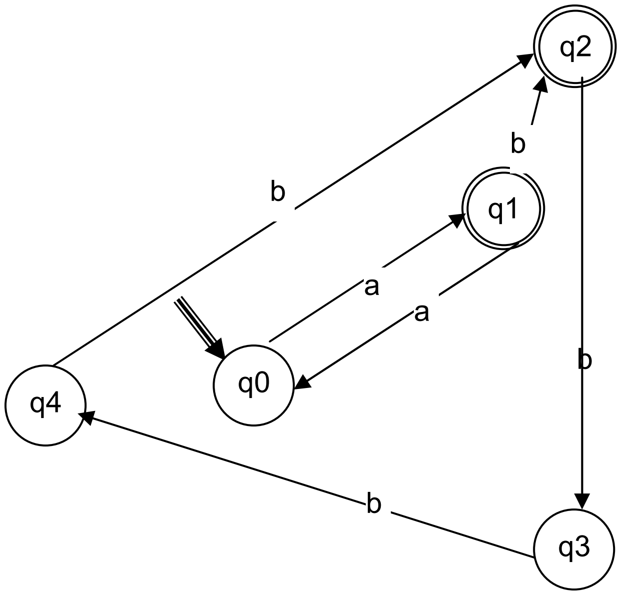
פיתרון

$(aWc)^n$ כאשר W הינה מילה מעל $\{a,b\}$ שמספר ה a ים פחות מספר ה b ים שווה 2 ובכל רגע נתון בסריקתו מימין לשמאל מתקיים שמספר ה a ים פחות מספר ה b ים גדול שווה 0 וקטן שווה ל 2.

תרגיל

הגדר לכל אוטמט את השפה המתקבלת

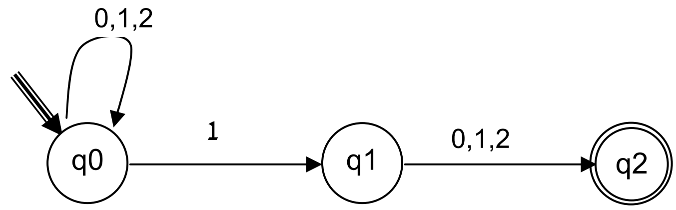


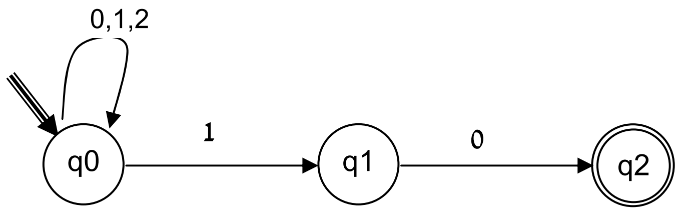


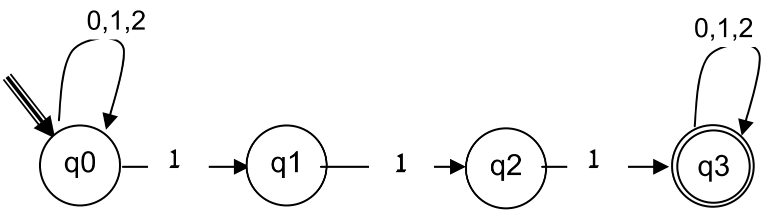
תרגילים באוטומט סופי לא דטרמיניסטי

תרגיל

הגדר לכל אחד מהאוטומטים הבאים מה השפה המתקבלת?



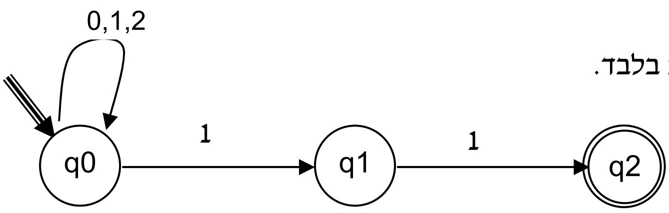




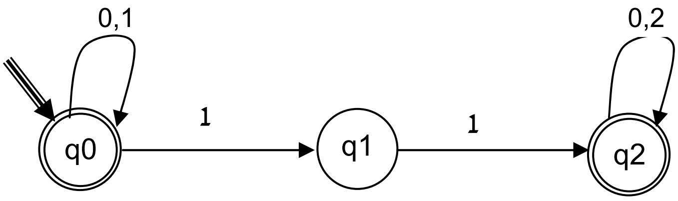
תרגיל

1. הסבר מדוע לא נכונים המשפטים הבאים בהתייחס לאוטומטים שלידם?
2. הגדר מה השפות שהאוטומטים מקבלים.

האוטומט מקבל מילים המכילות 11 פעם אחת בלבד.

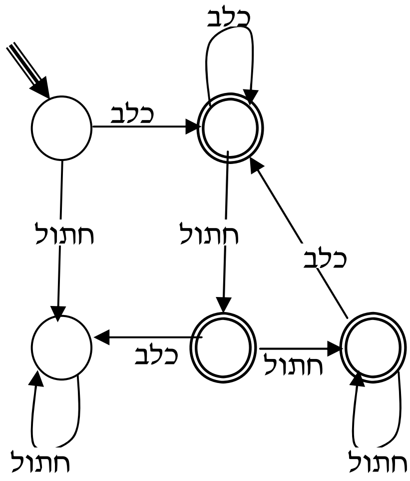


האוטומט אינו מקבל מילים המכילות 11 .



אוטומט מכפלה

לעיתים עלינו לבנות אוטומט אשר תיאורו מכיל תנאים שביניהם היחס וגם(חיתוך) או היחס או (איחוד).
כמובן שתמיד ניתן לבנות את האוטומט המבוקש ישירות אך קיימת גם דרך טכנית לבנות אוטומט עבור כל תנאי ואז לשלב גם את היחס (גם או או).
נראה מספר דוגמאות.



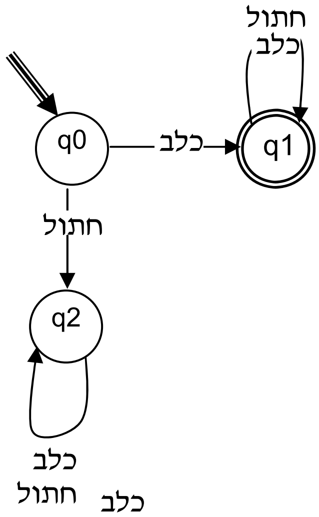
אוטומט מכפלה (חתולים וכלבים)

בתהלוכה שבה משתתפים חתולים וכלבים מתקיימים החוקים הבאים.

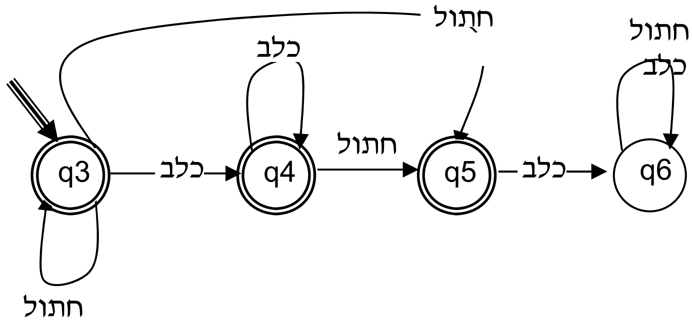
1. התהלוכה מתחילה בכלב.
2. אסור חתול שמשמאלו וימינו יהיו כלבים.

פתרון מלא ללא שימוש באוטומט מכפלה

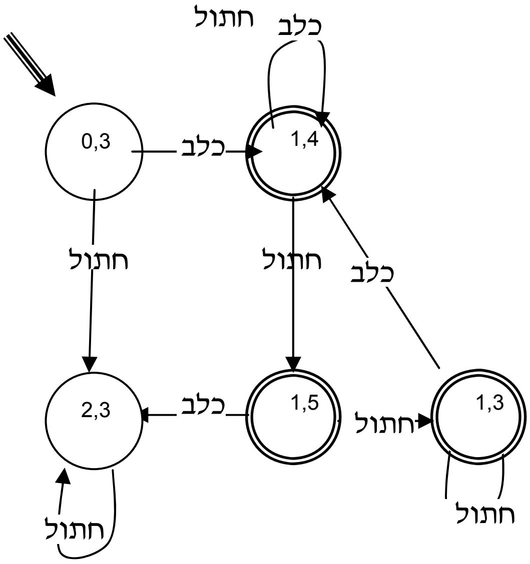
חייב להתחיל בכלב



אסור חתול בין שני כלבים



בניית אוטומט המכפלה		
מצב	**כלב**	**חתול**
q_0 q_3	q_1 q_4	q_2 q_3
q_1 q_4	q_1 q_4	q_1 q_5
q_1 q_5	q_1 q_6	q_1 q_3
q_1 q_3	q_1 q_4	q_1 q_3



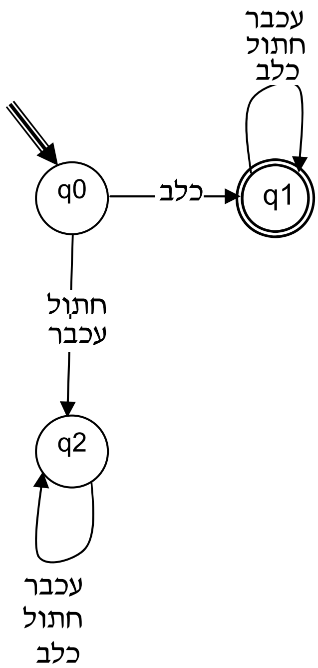
ראה מצגת הסבר

אוטומט מכפלה (חתולים כלבים ועכברים)

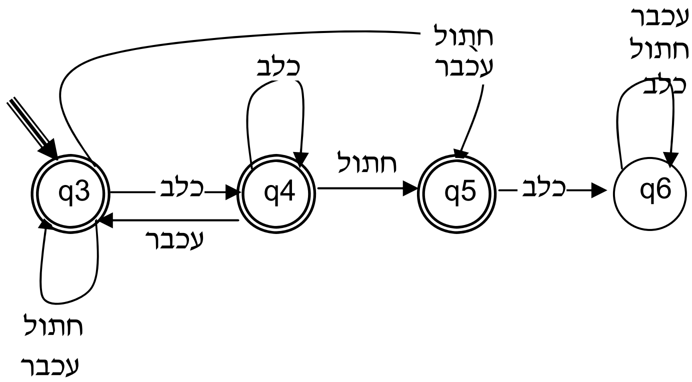
בתהלוכה שבה משתתפים עכברים חתולים וכלבים מתקיימים החוקים הבאים.

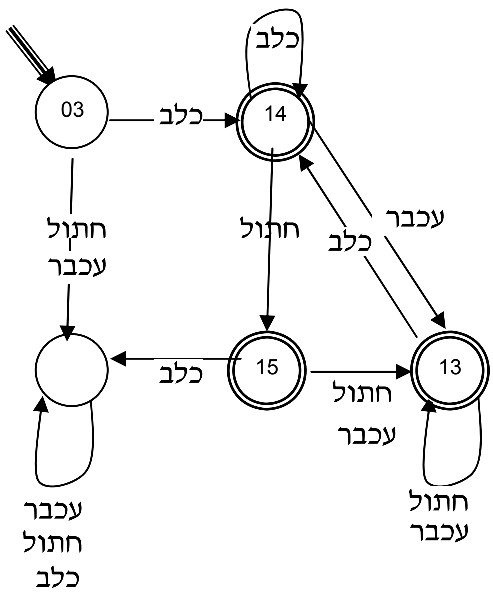
1. התהלוכה מתחילה בכלב.
2. אסור חתול שמשמאלו וימינו יהיו כלבים.

חייב להתחיל בכלב



אסור חתול בין שני כלבים





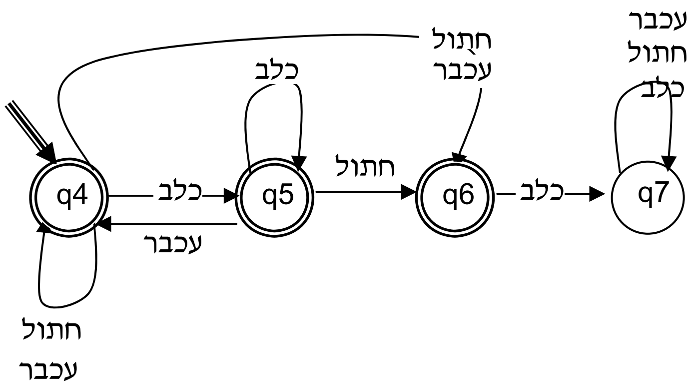
	כלב	חתול	עכבר
q_0 q_3	q_1 q_4	q_2 q_3	q_2 q_3
q_1 q_4	q_1 q_4	q_1 q_5	q_1 q_3
q_1 q_5	q_1 q_6	q_1 q_3	q_1 q_3
q_1 q_3	q_1 q_4	q_1 q_3	q_1 q_3

אוטומט מכפלה(חתולים כלבים ועכברים תנאי מורכב יותר)

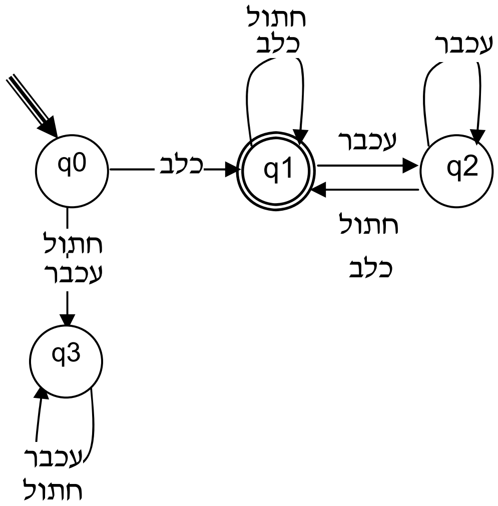
בתהלוכה שבה משתתפים עכברים חתולים וכלבים מתקיימים החוקים הבאים.

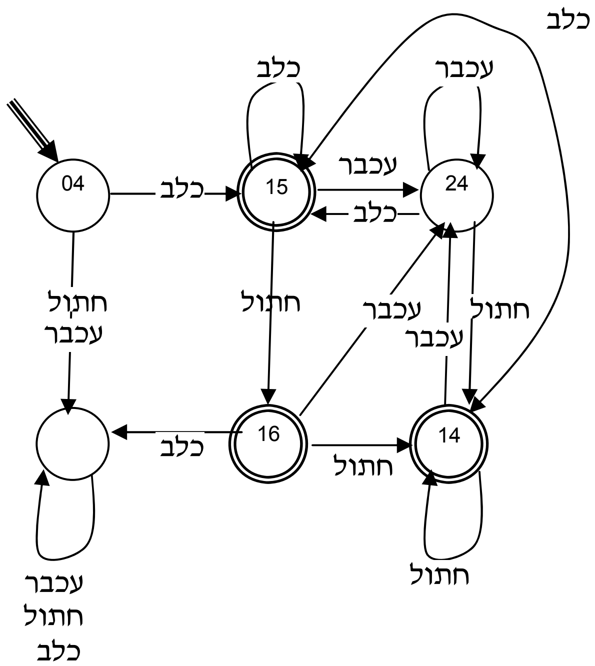
1. התהלוכה מתחילה בכלב.
2. אסור שהתהלוכה תסתיים בעכבר.
3. אסור חתול שמשמאלו וימינו יהיו כלבים.

אסור חתול בין שני כלבים



חייב להתחיל בכלב ואסור שיסתיים בעכבר





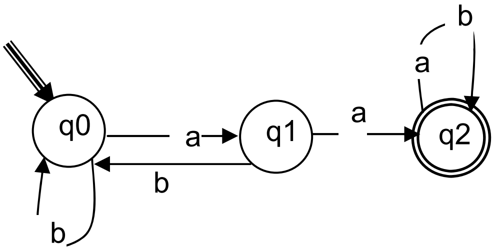
	כלב	חתול	עכבר
$q_0\ q_4$	$q_1\ q_5$	$q_3\ q_4$	$q_3\ q_4$
$q_1\ q_5$	$q_1\ q_5$	$q_1\ q_6$	$q_2\ q_4$
$q_1\ q_6$	$q_1\ q_7$	$q_1\ q_4$	$q_2\ q_4$
$q_2\ q_4$	$q_1\ q_5$	$q_1\ q_4$	$q_2\ q_4$
$q_1\ q_4$	$q_1\ q_5$	$q_1\ q_4$	$q_2\ q_4$

אוטומט מכפלה (מכיל "בת בת" אינו מכיל "בן בן")

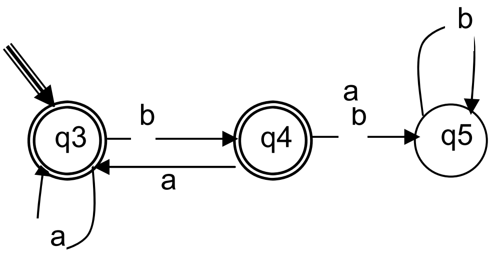
ילדים הושבו בשורה אך נקבעו כללים משונים :

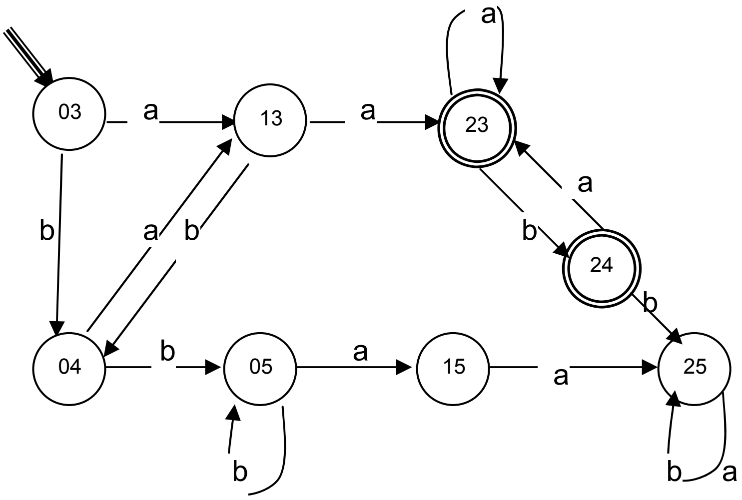
1. חייב שבשורה לפחות פעם אחת ישבו 2 בנות יחד כלומר אחת ליד השנייה (מכיל aa). שימו לב שמותר גם שלושה בנות ביחד ואם שלושה בנות יושבות יחד אזי התנאי שני בנות יחד מתקיים.
2. אסור ששני בנים ישבו יחדיו. (אינו מכיל bb)

מכיל aa

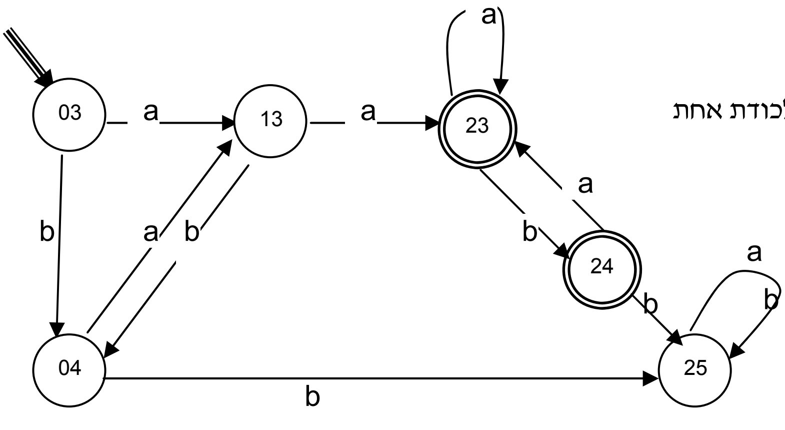


אינו מכיל bb





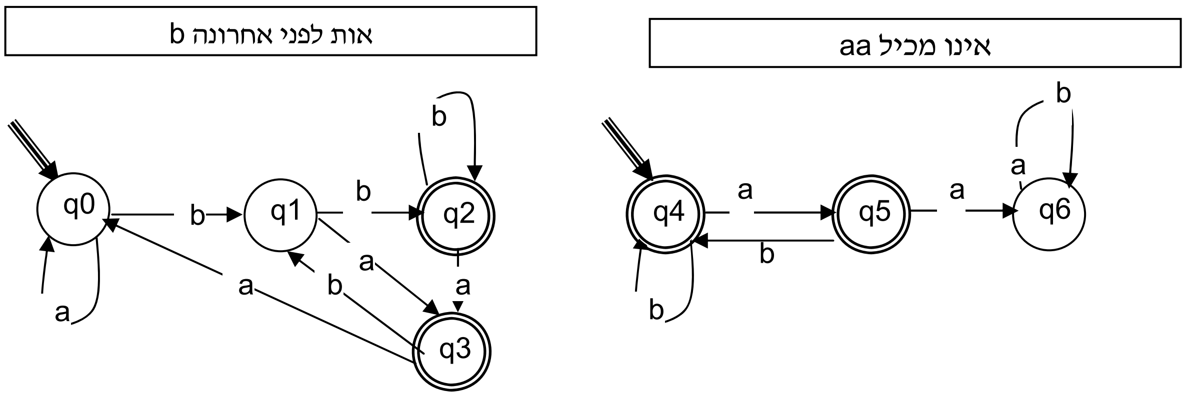
	a	b
$q_0\ q_3$	$q_1\ q_3$	$q_0\ q_4$
$q_1\ q_3$	$q_2\ q_3$	$q_0\ q_4$
$q_0\ q_4$	$q_1\ q_3$	$q_0\ q_5$
$q_2\ q_3$	$q_2\ q_3$	$q_2\ q_4$
$q_0\ q_5$	$q_1\ q_5$	$q_0\ q_5$
$q_2\ q_4$	$q_2\ q_3$	$q_2\ q_5$
$q_1\ q_5$	$q_2\ q_5$	$q_0\ q_5$
$q_2\ q_5$	$q_2\ q_5$	$q_2\ q_5$



את מצבים 25 15 05 ניתן לאחד למלכודת אחת

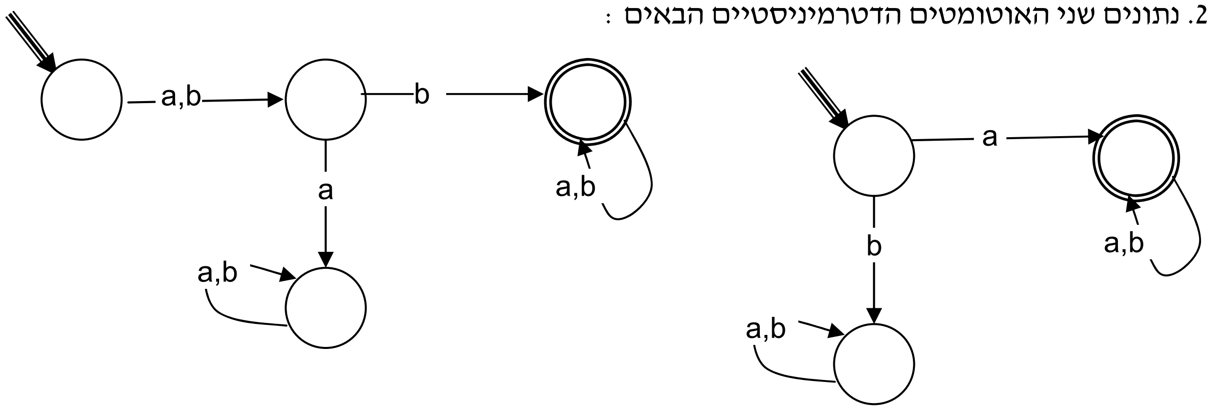
תרגילים באוטומט מכפלה

1. אוטומט מכפלה (אסור שיופיע aa ואות לפני אחרונה b)-השלם



בנה את אוטומט המכפלה

2. נתונים שני האוטומטים הדטרמיניסטיים הבאים :



רשום במילים את השפה המתקבלת ע״י כל אחד מהאוטומטים.

הגדר את השפות המתקבלות מ :

1. חיתוך האוטומטים A ו - B
2. איחוד האוטומטים A ו B.

בנה לכל אחת אוטומט מתאים.

סגירות שפות רגולריות תחת פעולות

שפה רגולרית הינה שפה שניתן לבנות לה אוטומט אס״ד ולהיפך לשפה שניתן לבנות לה אס״ד קוראים שפה רגולרית.

השפות הרגולריות סגורות תחת הפעולות הבאות: חיתוך, איחוד, שרשור, היפוך , משלים..

חיתוך ($L1 \cap L2$ פירושו כל המילים המתקבלות הן ב L1 והן ב$L2$).

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a.

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b} המסתיימות ב b.

$L3 = L1 \cap L2$ הינם המילים המתחילות ב a ומסתיימות ב b .

אם ידוע ש L1 רגולרית ו L2 רגולרית אזי $L1 \cap L2$ גם כן רגולרית.

איחוד ($L_1 \cup L_2$ פירושו כל המילים המתקבלות ב L1 או ב L_2).

תהי L_1 שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a.

תהי L_2 שפת כל המילים מעל {a,b} המסתיימות ב b.

$L_3 = L_1 \cup L_2$ הינם המילים המתחילות ב a או מסתיימות ב b .

אם ידוע ש L_1 רגולרית ו L_2 רגולרית אזי $L_1 \cup L_2$ גם כן רגולרית.

שרשור($L_1 \cdot L_2$ פירושו כל המילים אשר ניתן לחלק אותן לשני חלקים כך שהחלק השמאלי שייך ל L_1 והימני ל L_2)

-שים לב שגם מילה ריקה

יכולה להיות חלק שמאלי אם L1 כוללת אותה או חלק ימני אם L2 כוללת אותה).

תהי L_1 שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a.

תהי L_2 שפת כל המילים מעל {a,b} המסתיימות ב b.

$L_3 = L_1 \cdot L_2$ הינם המילים המתחילות ב a ומסתיימות ב b . קיבלנו כמו החיתוך, אך לא תמיד נקבל כך.

אם ידוע ש L_1 רגולרית ו L_2 רגולרית אזי $L_1 \cdot L_2$ גם כן רגולרית.

<u>שרשור של השפה הריקה עם כל שפה נותנת שפה ריקה.</u>

<u>שפה המכילה את המילה הריקה אינה שפה ריקה.</u>

R(L) פירושו היפוך L מסומן גם כ L^R .

תהי L שפת כל המילים מעל {a,b} המסתיימות ב a.

R(L) הינה שפת כל המילים המסתיימות ב a.

משלים (L) מסומן $\overline{L}$ פירושו כל המילים שאינן מתקבלות ב L .

תהי L שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a.

$\overline{L}$ הינה שפת כל המילים שאינן מתחילות ב a. (כולל המילה הריקה).

תרגילים(פעולות על שפות רגולריות)

1. נתונות שתי שפות רגולריות L1 L2 כלשהן.

האם נכון לומר ש $R(L1\cdot L2) == L2\cdot L1$

פתרון

התשובה לא. דוגמה: $L1=a^nb\ n>0$ $L2=a^kb\ k>0$

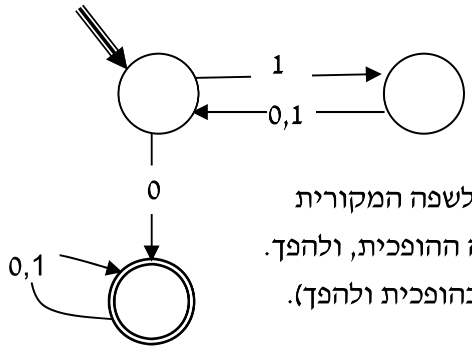
$L2\cdot L1$ מילים שמתחילות ב a $R(L1\cdot L2)$ מילים שמתחילות ב b

2. תהי L שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a ומסתיימות ב b.

מהי השפה $L \cap R(L)$ **פתרון :** השפה הריקה.

מהי השפה $L - R(L)$ **פתרון :** L.

3. נתון האוטומט הבא מעל הא״ב {0,1} : (קשה)



א. הגדר אילו מילים מתקבלות.

ב. בנה את האוטומט המשלים .

ג. האם יכול להיות שהאוטומט ההפוך לשפה כלשהי תהיה זהה לשפה המקורית (כלומר כל מילה המתקבלת בשפה המקורית תתקבל גם בשפה ההופכית, ולהפך. כמו כן כל מילה שלא מתקבלת בשפה המקורית לא תתקבל בהופכית ולהפך).

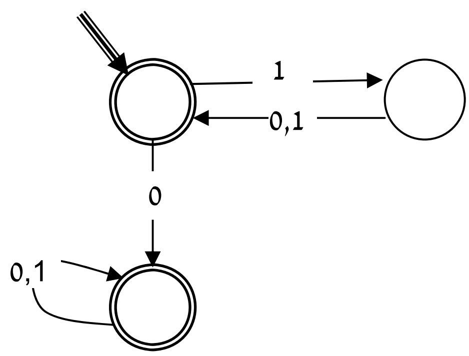
פתרון

א. המילים המתקבלות הם אלה שיש בהם לפחות פעם אחת 0 במקום אי זוגי .

ב. האוטומט המשלים (שיש בו רק 1 במקום אי זוגי לא כולל המילה הריקה.

ג. כן. מתחיל ב a ומסתיים ב a

נסה להגדיר את השפה עבור האוטומט הבא(קשה):



4. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב $\{a,b\}$

T היא אוסף כל המילים המתחילות ומסתיימות באותה אות לא כולל המילה הריקה.

טענה T^*T שווה T

הוכח או הפרך

פיתרון

שגוי כי המילה הקצרה ביותר ב T היא aa או bb

וב T^*T המילה הקצרה ביותר מכילה 4 אותיות.

דוגמה נוספת aa^*bb ב TT ואינה ב T

5. השפות הבאות הינן מעל {a,b,c}

L1 שפת כל המילים המתחילות ב a.

L2 שפת כל המילים המתחילות ב c.

L3 שפת כל המילים המתחילות ב aa.

מהן השפות הבאות? תן דוגמה למילה הקצרה ביותר המתקבלת בשפה ולמילה שאינה מתקבלת בשפה.

א. $L1 \cdot e$ כלומר שרשור כל מילה ב L1 למילה הריקה.

ב. $L1 \cdot \emptyset$

ג. $L1 \cdot R(L1)$ פתרון : שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות ב a ומסתיימות ב a כאשר המילה הקצרה ביותר הינה aa. (שימו לב שהמילה a אינה בשפה) .

ד. $L1-R(L1)$ פתרון : כל המילים המתחילות ב a ומסתיימות ב b

ה. $L1 \cup L2$

ו. $L1 \cdot L2$

ז. $\overline{L1 \cup L2}$

ח. $L1 \cdot R(L2)$

ט. $\overline{L1 \cup L2} \cdot L1 \cdot L2$

י. $\overline{L1 \cup L2} \cdot L1 \cdot R(L2)$

יא. $\overline{R(L1) \cup R(L2)} \cap (L1 \cup L2)$

יב. $\overline{L1 \cup L2 \cup e}$

יג. $L1 \cup L3$

יד. $L1 \cap L3$

טו. $L1 \cdot L2 \cdot L3$

טז. $L3-L1$

יז. $L1 - L3$

6. האם הכללים הבאים נכונים לכל שתי שפות רגולריות?

$$\left[\overline{A \cap B}\right] = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\left[\overline{A \cup B}\right] = \overline{A} \cap \overline{B}$$

7. נתונות השפות הבאות מעל {a,b,c} לא עשוי

$L_1 = \{a^n b^m \mid n>m>0\}$

$L_2 = \{b^n a^{2m} \mid m>n>0\}$

מהן השפות הבאות? תן דוגמה למילה הקצרה ביותר המתקבלת בשפה. תן דוגמה למילה שאינה מתקבלת בשפה.

א. $L1 \cup L2$

ב. $L1 \cdot L2$

ג. $\overline{L1 \cup L2}$

ד. $L1 \cdot R(L2)$

ה. $\overline{L1 \cup L2} \cdot L1 \cdot L2$

ו. $\overline{L1 \cup L2} \cdot L1 \cdot R(L2)$

ז. $\overline{R(L1) \cup R(L2)} \cap (L1 \cup L2)$

8. נגדיר $\sum^*$ כאוסף כל המילים מעל א"ב נתון, כולל המילה הריקה.

בעבור שפה L כלשהי נגדיר :

$Init(L) = \{u \mid uv \in L \quad u,v \in \sum^*\}$

$Fin(L) = \{v \mid uv \in L \quad u,v \in \sum^*\}$

$Min(L) =$

w Є L ובעבור כל w2 w1 המקיימות w=w1.w2 ו w2 אינה ריקה w1 אינה שייכת ל L

לפניך 5 שפות מעל ה א"ב {0,1}

$L_1=\{ 0^n 1^n 0^k 1^k \mid n \geq 1 \;\; k \geq 0 \}$

$L_2=\{ 0^n 1^k \mid n \geq 0 \;\; k \geq 0 \}$

$L_3=\{ 0^i 1^i \mid i \geq 0 \}$

$L_4=\{ 0^i 1^k \mid k \geq i \geq 0 \}$

$L_5=\{ 0^i 1^k \mid i \geq k \geq 0 \}$

מהי השפה $L1 \cap L2$? מהי השפה Init (L3) ?

מהי השפה Fin(L3) ? האם 0011 Є Min(L4)?

האם 0011 Є Min(L5)? האם $L_4 \cap L_5$ רגולרית ?

9. **(לצטר)** לפניך חמש השפות L_1-L_5 מעל הא״ב $\{a , b , c\}$.

$L_1 = \{ w /$ אוסף כל המילים שבהן מספר האותיות ב- w אי זוגי $\}$

$L_2 = \{ w / |w| \% 3 = 2 \}$

$L_3 = \{ a^n b^{3n} / n \geq 0 \}$

$L_4 = \{ w /$ אוסף כל המילים שבהן מספר האותיות ב- w זוגי $\}$

$L_5 = \{a^n b^{n+1} c^m \mid n>=0, \ m=n\%3 \}$

מהן השפות הבאות?

$L_6 = L_5 \cap L_1$

$L_7 = L_3 \cap L_2$

$L_8 = L_3 \cap L_4$

$L_9 = L_1 \cap L_2$

$L_{10} = L_3 \cap L_1$

$L_{11} = L_3^2 \cdot R(L_5)$

10. מה השוני בתשובה הקודמת לו

$L_1 = \{ w /$ אוסף כל המילים שאורכן אי זוגי ומכילות את האותיות a,b בלבד $\}$

11. נתונות השפות הבאות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$L1=\{ a^n b^m \ \ n,m \geq 0 \}$

$L2=\{ b^n a^m \ \ n,m \geq 0 \}$

מהי השפה $L1 * L2$

האם $R(L1)$ שווה $L2$? הוכח את תשובתך.

האם $(L2)^*(L2)$ שווה$R(L1)^*L2$? הוכח את תשובתך.

12. לפניך השפות הבאות:

$L1=\{w$ אוסף כל המילים מעל $\{a,b\}$ שבהן מספר ה a ב w זוגי$\}$

$L2=\{w$ אוסף כל המילים מעל $\{a,b\}$ שבהן מספר ה b ב w זוגי$\}$

$L3= \{ a^n b^m \mid n,m \geq 0\}$ הא״ב הוא $\{a,b\}$

$L4= \{ b^n a^m \mid n,m \geq 0\}$ הא״ב הוא $\{a,b\}$

$L5 = \{ b^n c^n a^x \mid n=x\%3 \ ,x >= 0 \}$ הא״ב הוא $\{a,b,c \}$

$L6 = \{$ שפת כל המילים מעל $\{ a,b,c\}$ שהרצף ac מופיע בהן בדיוק פעם אחת $\}$

לפניך מספר טענות. קבע לכל אחת אם היא נכונה או לא <u>ונמק</u> את קביעתך.

פתרון

1. aba **Є (**L1 ∩ L2)

לא כי מספר ה b במילה איזוגי

2. **(**L1 ∩ L3) ∩ L2 **= {** $a^n b^m$ | n,m ≥ 0 , n זוגי , m זוגי } **כן**

3. L3 ∩ L4 = **Ø**

לא כי a מתקבל בשניהם

4. L5·L5 **=** { $b^n c^n a^x$ $b^n c^n a^x$ ׀ n=x%3 , x>=0 }

לא כי b^n לא חייב להיות זהה

5. L5∩ L6 = **ø**

כן כי ac אסור שיופיע ב L5

6. L5∩R(L6) = { bbccaa , bca }

לא כי bcaaaa גם כן מתקבל

שאלות ופתרונות שניתנו בקורס מורים מובילים בהנחיית ד"ר מיכל ארמוני

(חוקי סגירות של שפות רגולריות)

<u>שאלה 1</u> *(איריס ברגורי)*

תהיינה L_1 ו-L_2 שפות מעל הא״ב $\{0,1\}$. תהי $L_2 – L_1$ שפת כל המילים השייכות ל-L_2 אך אינן שייכות ל-L_1.
הוכח או הפרך (על ידי דוגמה נגדית) את הטענה הבאה: אם L_1 ו-$L_2 – L_1$ רגולריות, אז L_2 רגולרית.

<u>פתרון</u>

הטענה אינה נכונה.

דוגמה נגדית: $L_1 = \{w \mid |w| > 3\}$.

$L_2 = \{a^n b^n \mid n>0\}$.

* $L1$ היא רגולרית (להוכחה מלאה יש כמובן להראות אוטומט סופי שמקבל את L_1).
* $L_2 – L_1 = \{a^n b^n \mid n>0, 2n<3\} = \{a^n b^n \mid n=1\}$

  כלומר, $L_2–L_1$ היא שפה סופית (שמכילה בדיוק מילה אחת) ולכן רגולרית.

אבל ידוע כי L_2 אינה רגולרית. ומכאן ההוכחה.

<u>שאלה 3</u> *(ויקטוריה צורי)*

תהי L שפת כל המילים מעל הא״ב $\{0,1,2\}$, שמתחילות במספר כלשהו (גדול ממש מ-0) של אפסים ואין בהן שתי אותיות 1 צמודות. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

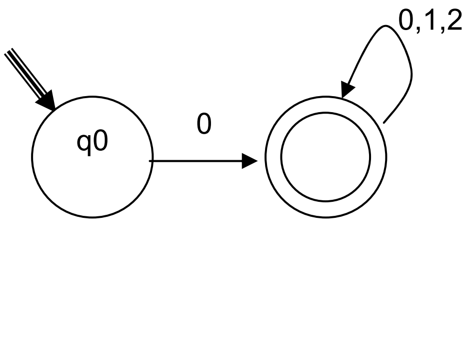
קל יותר לפתור שאלה זו בעזרת פירוק לשפות פשוטות יותר ושימוש בתכונות סגירות, אך גם פתרון ישיר, על ידי בניית אוטומט הוא אפשרי. בפתרון ישיר לעיתים קרובות שוכחים לטפל באות 2.

ניתן לפרק את L כך: $L = L_1 \cap \overline{L_2}$, L_1 ו-L_2 מעל הא״ב $\{0,1,2\}$:

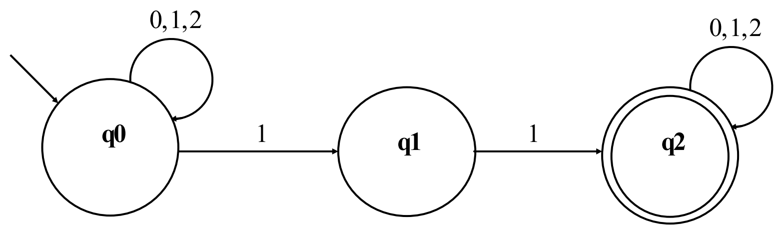
$L_1=\{w \mid$ w מתחילה ברצף לא ריק של אפסים$\}$

$L_2=\{w \mid$ w מכילה רצף 11$\}$

L_1 רגולרית – הנה אוטומט שמקבל אותה (אוטומט דטרמיניסטי לא מלא)



L_2 רגולרית – הנה אוטומט שמקבל אותה (אוטומט לא דטרמיניסטי):

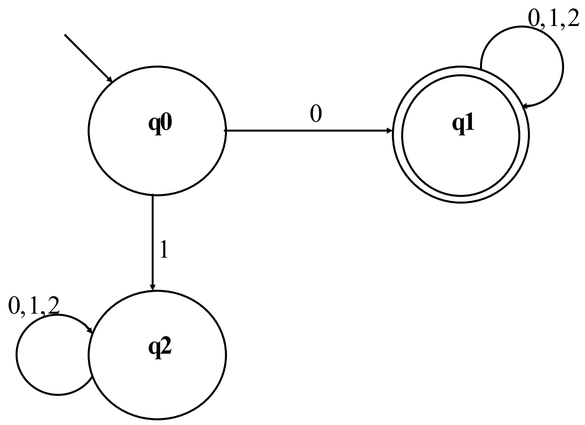


מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים גם $\overline{L_2}$ רגולרית,

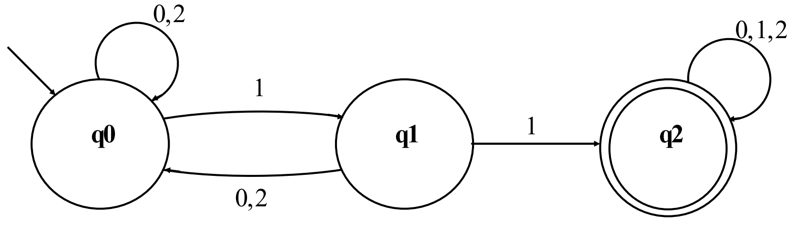
ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L = L_1 \cap \overline{L_2}$ רגולרית.

הערה: אם השאלה ניתנת לפני הוראת פרק 4, יש כמובן לתת אוטומטים דטרמיניסטיים להוכחת רגולריות L_1 ו-L_2.

הנה אוטומט מתאים עבור L_1:



והנה אוטומט מתאים עבור L_2:



שאלה 4 (ויקטוריה צור)

נתבונן בשפה מעל הא"ב {a,b,c} המכילה את כל המילים שאורכן אי-זוגי והן מקיימות לפחות אחד משני התנאים הבאים:

1. מתחילות ומסתיימות באותה אות.
2. מכילות את הרצף aa.

האם השפה רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

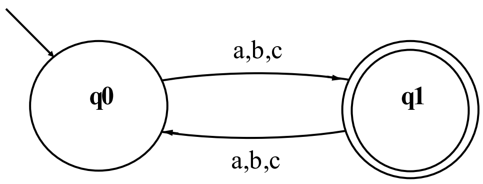
פתרון ישיר ללא שימוש בפירוק (ע"י בניית אוטומט סופי המקבל את השפה) אינו פשוט, אך ניתן להגיע לפתרון בעל מורכבות טכנית נמוכה ע"י שימוש בפירוק הבא: $L = L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$ כאשר L_1, L_2 ו-L_3 מעל {a,b,c}:

L_1={w | w באורך אי-זוגי}

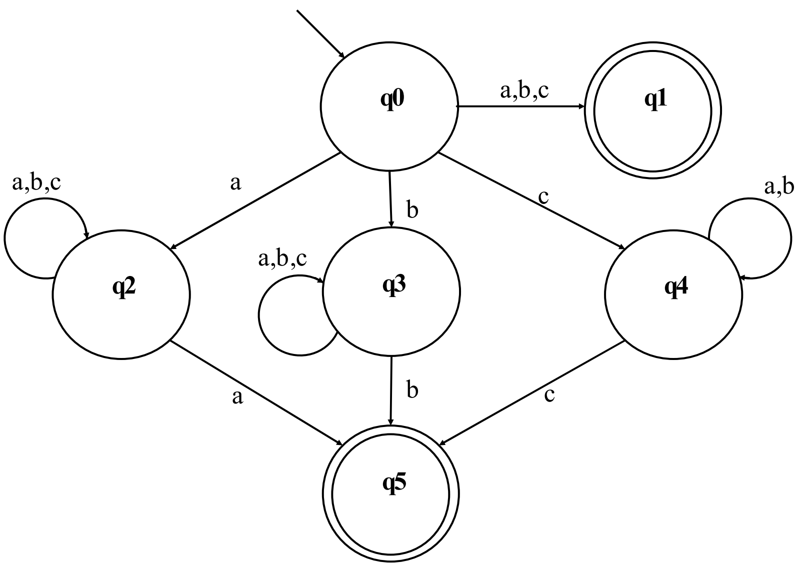
L_2={w | w מתחילה ומסתיימת באותה אות}

L_3={w | w מכילה את הרצף aa}

הנה אוטומט סופי שמקבל את L_1:



הנה אוטומט סופי שמקבל את L_2:

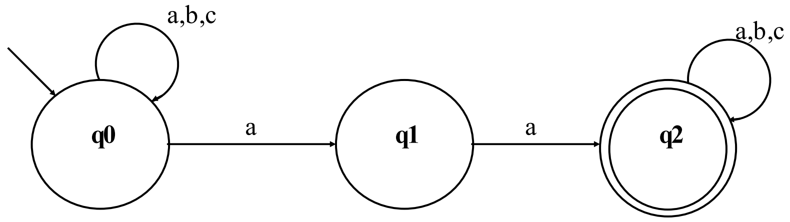


זהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי.

אוטומט דטרמיניסטי עבור שפה זו הוא מורכב למדי, ולכן שאלה זו טובה כדי לעודד שימוש באי-דטרמיניזם (ומתאימה אחרי סיום תהליך ההוראה של פרק 4).

q_1 מטפל במקרה המיוחד שהמילה בת אות אחת – כלומר האות המתחילה היא גם האות המסיימת (כמובן, אפשר לאחד את q_1 ו-q_5).

הנה אוטומט סופי שמקבל את L_3 :



לכן L_1, L_2 ו-L_3 הן שפות רגולריות.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם $L_2 \cup L_3$ רגולרית ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_1 \cap (L_2 \cup L_3)$ היא רגולרית.

שאלה זו מתאימה הן לעבודת כיתה, הן לשיעורי בית והן למבחן. המורה יכול/ה להיעזר בה כדי לבדוק את מידת השליטה של התלמידים במנגנון הלא דטרמיניסטי ואת נטייתם לפתרונות המשתמשים בפירוק (לעומת פתרונות ישירים).

שאלה 5 (ויקטוריה צורי)

נתבונן בשפה מעל הא״ב {0,1,2}, המכילה את כל המילים שמתחילות ברצף 01 או ברצף 10, ומסתיימות ברצף 10 או ברצף 0111. האם השפה היא רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

פתרון ישיר שאינו משתמש בפירוק אינו פשוט, כי קל לשכוח מילים כמו 10, 0111 או 10111 שהן בשפה ומקיימות תנאים בחפיפה. כמובן, כאשר מפרקים את השפה לשפות פשוטות, ההתמודדות היא עם כל תנאי בנפרד ואין צורך לחשוב על שילוב התנאים.

השאלה מתאימה אחרי סיום תהליך ההוראה של פרק 4, כי שימוש באי-דטרמיניזם מפשט באופן משמעותי את המורכבות הטכנית של הפתרון, ובנוסף, אז ניתן להשתמש בפעולת ההיפוך.

ניתן להציג את השפה באופן הבא, כאשר L_1, L_2 ו-L_3 הן מעל הא״ב {0,1,2}.

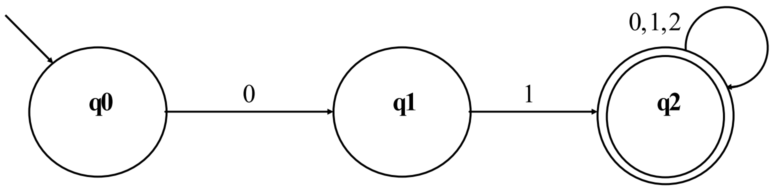
$(L_1 \cup L_2) \cap (R(L_1) \cup L_3)$

L_1={w | w מתחילה ב-01}

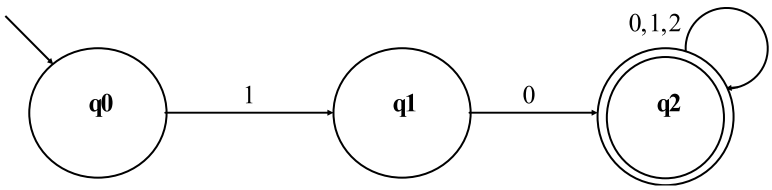
L_2={w | w מתחילה ב-10}

L_3={w | w מסתיימת ב-0111}

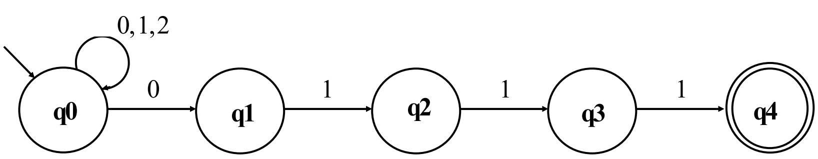
L_1 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



L_2 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



L_3 היא רגולרית – הנה אוטומט סופי המקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_1)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם $L_1 \cup L_2$ ו-$R(L_1) \cup L_3$ רגולריות, ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $(L_1 \cup L_2) \cap (R(L_1) \cup L_3)$ רגולרית.

שאלה 6 (ריקה רם)

תהי L שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} שאורכן לפחות 6, ובין 3 האותיות בהן מתחילה המילה אין שתי אותיות זהות ובין 3 האותיות בהן מסתיימת המילה אין שתי אותיות זהות. האם שפה זו רגולרית? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון

ניתן להגדיר את L בעזרת שתי השפות הבאות:

L_1 היא שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} שאורכן בדיוק 3 ואין בהן שתי אותיות זהות.

L_2 היא שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c}.

L_1 היא סופית ולכן רגולרית. L_2 אף היא רגולרית (מוכח בספר לתלמיד).

$L=L_1\cdot L_2\cdot L_1$. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1\cdot L_2$ רגולרית ולכן גם $L=(L_1\cdot L_2)\cdot L_1$ רגולרית.

שאלה זו מדגימה יפה כי השימוש בפירוק יכול להפחית בצורה משמעותית את המורכבות הטכנית של הפתרון, ובמקרה זה אפילו אין צורך לבנות אוטומט, בעוד שבניית אוטומט ישיר לשפה כלל אינה טריוויאלית.

שאלה 7 (אסנת אגנלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

הוכח ששפת כל המילים מעל הא״ב {0,1,2,…9} המייצגות מספרים שמתחלקים ב-12 ללא שארית היא שפה רגולרית.

פתרון

השפה הנתונה ניתנת לפירוק באופן הבא: $L_1\cap L_2$

כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא״ב {0,1,2,…9} המייצגות מספרים שמתחלקים ב-4 ללא שארית ו-L_2 היא שפת כל המילים מעל הא״ב {0,1,2,…9} המייצגות מספרים שמתחלקים ב-3 ללא שארית.

L_1 ו-L_2 הן שפות רגולריות. אוטומט סופי המקבל את L_1 נתון באיור 2.13 ג׳ בספר לתלמיד. אוטומט עבור L_2 פועל ע״פ עקרון דומה. יש לו חמישה מצבים:

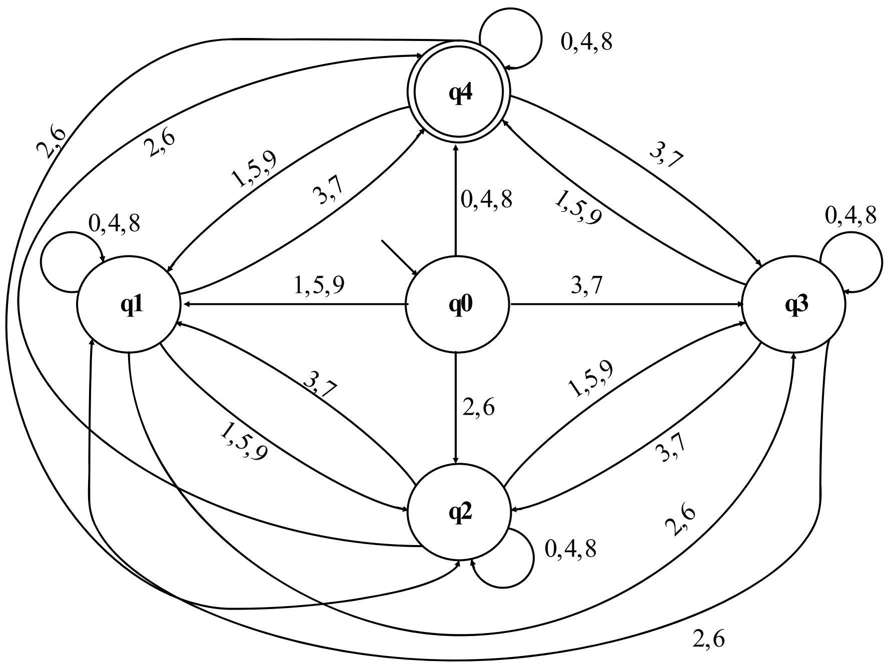
q_0 – מצב התחלתי.

q_1 – זוכר שארית 1 בחלוקה ב-4.

q_2 – זוכר שארית 2 בחלוקה ב-4.

q_3 – זוכר שארית 3 בחלוקה ב-4.

q_4 – מצב מקבל, זוכר שארית 0 בחלוקה ב-4.



אפשר, כמובן, להגדיר שפות נוספות על אותו עקרון – כמו שפת כל המילים מעל הא״ב {0,1,2,...9} המייצגות מספר שמתחלק ב-20 ולהשתמש במקרה זה בשפת כל המילים מעל הא״ב הזה המייצגות מספר שמתחלק ב-5 ושפת כל המילים מעל הא״ב הזה המייצגות מספר שמתחלק ב-4.

<u>שאלה 8 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי ואורנה שטיין)</u>

הוכח כי שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} שאינן מכילות רצף של שתי אותיות זהות היא רגולרית.

<u>פתרון</u>

ניתן לייצג את השפה בעזרת שלוש השפות הבאות, כולן מעל הא״ב{a,b,c} :

L_1 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף aa.

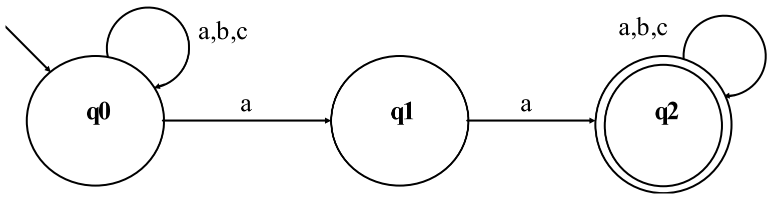
L_2 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bb.

L_3 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף cc.

השפה הנדונה היא $\overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{L_3}$

(וניתן להציגה גם כ- $\overline{(L_1 \cup L_2 \cup L_3)}$).

L_1 היא רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה (לא דטרמיניסטי).



אוטומטים דומים מקבלים את L_2 ו-L_3. עבור L_2 נחליף את a במעברים מ-q_0 ל-q_1 ומ-q_1 ל-q_2 ב-b, ועבור L_3 נחליף את a במעברים האלו ב-c. לכן גם L_2 ו-L_3 רגולריות.

בייצוג הראשון מקבלים כי השפה הנדונה רגולרית ע״י שימוש שלוש פעמים בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת המשלים, ופעמיים שימוש בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת החיתוך.

בייצוג השני מקבלים כי השפה הנדונה רגולרית ע״י שימוש פעמיים בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת האיחוד ופעם אחת שימוש בתכונת הסגירות של השפות הרגולריות לפעולת המשלים.

שאלה 10 (אסנת אנגלמן, אסתי מאסטראסי, אורנה שטיין)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב $\{a,b\}$ המתחילות ברצף לא ריק של אותיות a ומסתיימות ברצף אותיות b שארוך מהרצף הפותח או שהן מורכבות מחזרה מספר כלשהו (גדול מ-0) של פעמים על הרצף ab. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

ניתן להציג את L באופן הבא: $L = L_1 \cup L_2$.

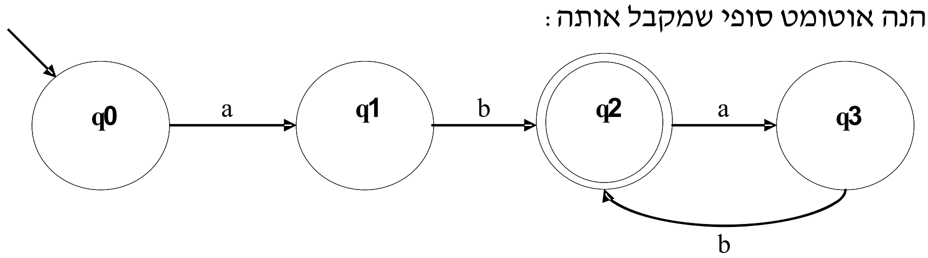
L_1 מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$L_1=\{a^n w b^m \mid m>n>0,$ מעל $\{a,b\}$ $w\}$

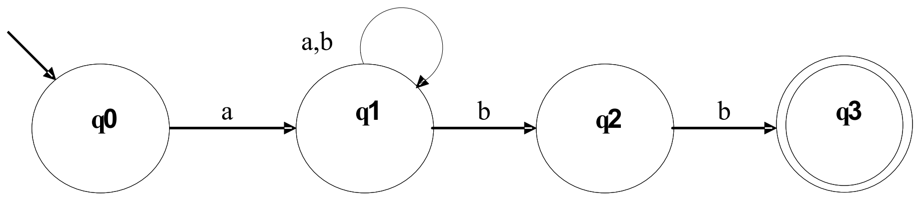
L_2 מעל הא"ב $\{a,b\}$:

$L_2=\{(ab)^j \mid j>0\}$

L_2 רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_1 אף היא רגולרית. נשים לב כי למעשה משמעות הדרישה היא שהמילה תתחיל באות a ותסתיים ב-2 אותיות b. אם המילה מתחילה ביותר מאות a אחת ניתן לצרף את האותיות העודפות לתוך המילה w וכך בכל מקרה לא מופר התנאי $m>n$. לכן אוטומט מתאים הוא האוטומט הלא דטרמיניסטי הבא:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם L רגולרית.

ניתן גם לפרק את L_1 לחיתוך שפת כל המילים המתחילות ב-a ושפת כל המילים המסתיימות ב-bb.

נשים לב כי אם היינו רוצים להחליף את התנאי הראשון בדרישה חזקה יותר, לפיה הרצף הפותח של המילה כולל את כל האותיות a עד האות הראשונה שאינה a, ובדומה הרצף הסוגר כולל את כל האותיות b מהאות האחרונה במילה שאינה b ועד לסוף המילה, הרי השפה המושרית על ידי דרישה זו היא כמובן שונה. במקרה זה השפה היא

$L'_1=\{a^n w b^m \mid m>n>0,$ אינה מתחילה ב-a ואינה מסתיימת ב-b, מעל $\{a,b\}$ $w\}$

וזו שפה חופשית הקשר, שאינה רגולרית.

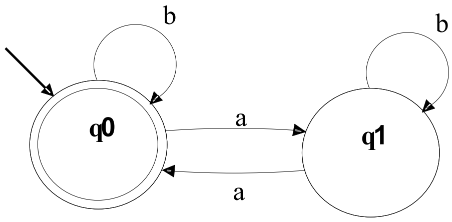
שאלה 11 (לאה יעקובוביץ)

תהי L שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} שבהן השארית של מספר האותיות a מחולק ב-2 שווה לשארית של מספר האותיות b מחולק ב-2. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

תרגיל זה דומה מאוד לשאלה 2 בבעיות המשולבות (השאלה של אלה פוק). L היא למעשה השפה $(L_1 \cap L_2) \cup (\overline{L_1} \cap \overline{L_2})$ כאשר L_1 היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות a זוגי ו-L_2 היא שפת כל המילים מעל הא"ב {a,b} בהן מספר האותיות b זוגי.

L_1 רגולרית. הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית כי אוטומט שמקבל אותה מתקבל מהאוטומט האחרון ע"י החלפת כל a ב-b וכל b ב-a.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים. גם $\overline{L_1}$ ו- $\overline{L_2}$ רגולריות.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $L_1 \cap L_2$ ו- $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ רגולריות ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת האיחוד גם L רגולרית.

ניתן כמובן להוכיח ש-L רגולרית ע"י בנייה ישירה של אוטומט. במקרה זה מדובר באוטומט בן 4 מצבים (עבור כל צירוף של זוגיות מספר אותיות a וזוגיות מספר אותיות b)

שאלה 12 (דורון זוהר)

א. נתונות שתי שפות מעל הא״ב {a,b,c}:

L_1 היא שפת כל המילים המתחילות ב-a. L_2 היא שפת כל המילים המתחילות ב-b.

נתון כי L_1 ו-L_2 רגולריות. הוכח, תוך שימוש בנתון ובתכונות סגירות, כי L_3 אף היא רגולרית, כאשר L_3 היא שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} המתחילות ב-c.

ב. לפניך הגדרות שונות של L_3 בעזרת L_1 ו-L_2 אשר הוצעו ע״י תלמידים תוך ניסיון לפתור את סעיף א׳. לכל הגדרה קבע אם היא נכונה או שגויה, ואם היא שגויה (כלומר אינה שווה ל-L_3) כתוב איזו שפה היא יוצרת.

I $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ II $\overline{(L_1 \cap L_2)}$

III $\overline{(L_1 \cup L_2 \cup \{\varepsilon\})}$ IV $\overline{L_1} \cup \overline{L_2}$

V $L_1 \cap L_2$

<u>פתרון</u>

סעיף א׳ של השאלה מתאים כשיעורי בית או כשאלה בבחינה. כדאי להפריד ממנו את סעיף ב׳ ולתת אותו אח״כ כבסיס לעבודת כיתה (וכמובן שאם תוך פתרון סעיף א׳ נתנו התלמידים פירוקים אחרים ל-L_3 כדאי לדון גם בהם).

א. שפת כל המילים המתחילות ב-c מכילה בדיוק את כל המילים שאינן מתחילות ב-a וגם אינן מתחילות ב-b, וגם אינן המילה הריקה. כלומר $L_3 = \overline{L_1} \cap \overline{L_2} \cap \overline{\{\varepsilon\}}$. מאחר שנתון ש-$L_1$ ו-L_2 רגולריות, ומאחר ש-$\{\varepsilon\}$ סופית, ולכן גם כן רגולרית, ומאחר שהשפות הרגולריות סגורות לפעולת המשלים הרי שגם $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ ו- $\overline{\{\varepsilon\}}$ רגולריות ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ רגולרית וגם $L_3 = (\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) \cap \overline{\{\varepsilon\}}$ רגולרית.

ב. I המילים שאינן מתחילות ב-a ואינן מתחילות ב-b הן או המילה הריקה או מילים שמתחילות ב-c, ולכן אין זו השפה המבוקשת (המילה הריקה שייכת לשפה $\overline{L_1} \cap \overline{L_2}$ אך לא לשפה L_3).

II אין מילים ששייכות ל-$L_1 \cap L_2$ משום שאין מילה שגם מתחילה ב-a וגם מתחילה ב-b. לכן $L_1 \cap L_2$ היא השפה הריקה ושפת המשלים שלה היא שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c}.

III $L_1 \cup L_2 \cup \{\varepsilon\}$ היא שפת כל המילים שמתחילות ב-a או מתחילות ב-b או שהן המילה הריקה. משלימתה היא לכן שפת כל המילים שמתחילות ב-c כלומר L_3 (כמובן, מכללי דה-מורגן ומסעיף א׳ ניתן לקבל זאת, אלא שלא כל התלמידים מכירים את כללי דה-מורגן).

IV כל המילים שאינן מתחילות ב-a או שאינן מתחילות ב-b היא שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c}, משום שאם מילה מתחילה ב-a אז היא אינה מתחילה ב-b ואם מילה מתחילה ב-b אז היא אינה מתחילה ב-a וכמובן המילה הריקה או מילה שמתחילה ב-c אינה מתחילה ב-a וגם אינה מתחילה ב-b ולכן כל מילה מקיימת לפחות את אחד משני התנאים (שוב ניתן להגיע לכך גם מכללי דה-מורגן וסעיף II).

V כאמור בסעיף II, $L_1 \cap L_2$ היא השפה הריקה Ø.

שאלה 17 (רחלי צ'רניחוב)

תהי L שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} המקיימות את כל התנאים הבאים :

א. ניתן לחלק את המילה לשני חלקים כך שחלקה הראשון מכיל את הרצף bca וחלקה השני מכיל את הרצף acb.

ב. המילה מכילה את הרצף bb.

ג. המילה אינה מכילה יותר משלוש אותיות a רצופות.

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

ניתן לייצג את L בעזרת השפות הבאות, כולן מעל הא״ב {a,b,c} :

L_1 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bca.

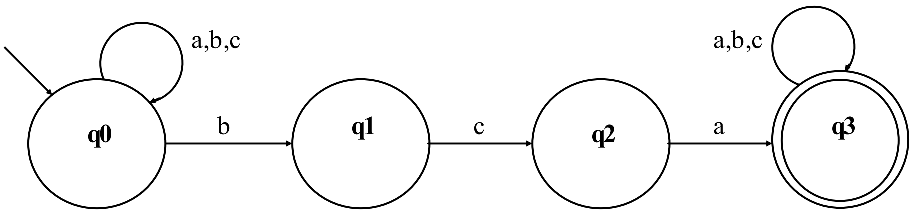
L_2 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף bb.

L_3 היא שפת כל המילים שמכילות את הרצף aaaa.

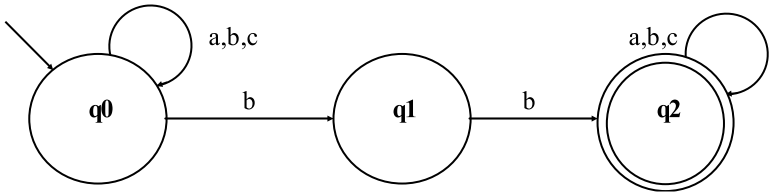
$$L = ((L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2) \cap \overline{L_3}$$

L_1, L_2 ו-L_3 רגולריות :

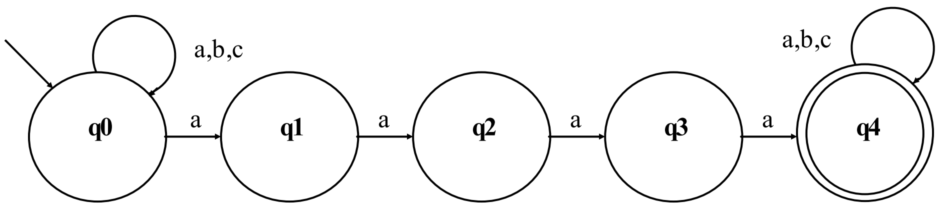
A_1 עבור L_1 :



A_2 עבור L_2 :



A_3 עבור L_3 :



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת ההיפוך גם $R(L_1)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת השרשור גם $L_1 \cdot R(L_1)$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת המשלים גם $\overline{L_3}$ רגולרית.

מסגירות משפחת השפות הרגולריות לפעולת החיתוך גם $(L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2$ וגם $L = ((L_1 \cdot R(L_1)) \cap L_2) \cap \overline{L_3}$ רגולרית.

שאלה 19 (דגנית מורן)

תהי L שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} המקיימות את כל התנאים הבאים:

האות לפני האחרונה במילה היא a, המילה מכילה פעמיים את הרצף abc ומספר האותיות b במילה הוא זוגי.

א. הבא דוגמה למילה השייכת לשפה ודוגמה למילה שאינה שייכת לשפה.

ב. האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

<u>פתרון</u>

א. המילה cabcccabcaa שייכת לשפה.

המילה abcabcabc אינה שייכת לשפה.

ב. נגדיר את שפות הבסיס הבאות מעל הא״ב {a,b,c}:

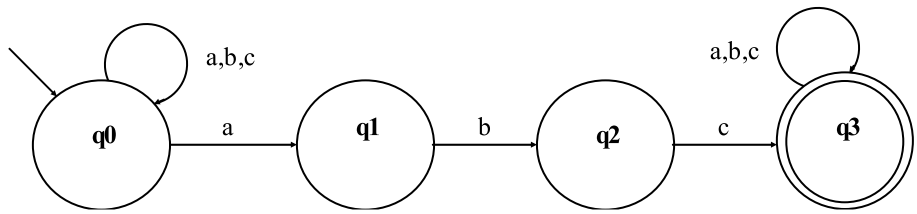
L_1 – שפת כל המילים שמכילות את הרצף abc.

L_2 – שפת כל המילים בהן מספר האותיות b זוגי.

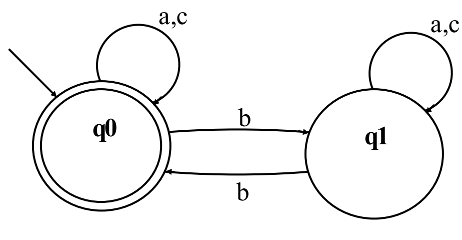
L_3 – שפת כל המילים בהן האות לפני האחרונה היא a.

כעת $L = (L_1 \cdot L_1) \cap L_2 \cap L_3$

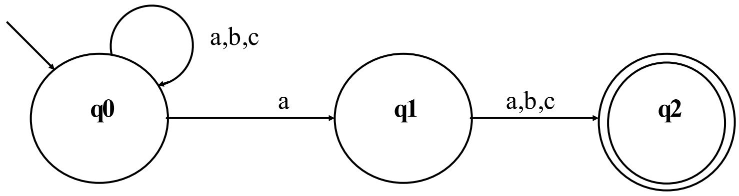
L_1 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_2 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



L_3 רגולרית – הנה אוטומט סופי שמקבל אותה:



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_1$ רגולרית. מסגירות משפחת השפות הרגולריות לחיתוך גם $L_2 \cap L_3$ רגולרית וגם $L = (L_1 \cdot L_1) \cap (L_2 \cap L_3)$.

שאלה 21 (דגנית מורן)

תהי L שפת כל המילים מעל הא״ב {a,b,c} המקיימות לפחות אחד מבין התנאים הבאים :

א. מתחילות ברצף ab ומכילות cc.

ב. מכילות את הרצף bbc.

האם L רגולרית? הוכח את תשובתך.

פתרון

נגדיר את שפות הבסיס הבאות מעל הא״ב {a,b,c} :

$L_1 = \{ab\}$

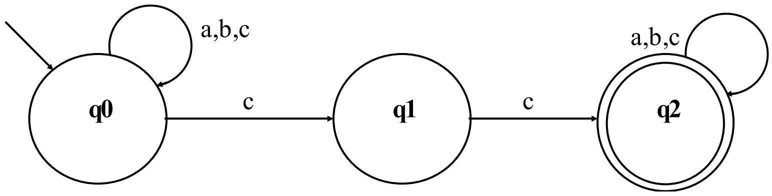
L_2 – שפת כל המילים שמכילות cc,

L_3 – שפת כל המילים שמכילות bbc.

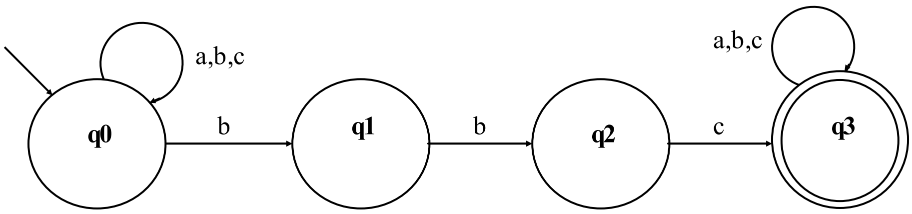
$L = (L_1 \cdot L_2) \cup L_3$

L_1 סופית ולכן רגולרית.

L_2 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה :



L_3 רגולרית כי הנה אוטומט סופי שמקבל אותה :



מסגירות משפחת השפות הרגולריות לשרשור גם $L_1 \cdot L_2$ רגולרית ומסגירות משפחת השפות הרגולריות לאיחוד גם $L = (L_1 \cdot L_2) \cup L_3$ רגולרית.

תרגיל 1 הכלת שפות

נתון ש L רגולרית ו 'L מוכלת בה . האם 'L רגולרית ?

פתרון

יתכן שתהיה רגולרית ויתכן שלא.

דוגמה שלא : תהיי L שפת כל המילים מעל {a,b} הינה רגולרית.

תהיי 'L שפת כל המילים מעל {a,b} המקיימים את התנאי $\{a^n b^n \quad | \; n > 0\}$

הוכחנו ש 'L אינה רגולרית.

דוגמה שכן : תהיי L שפת כל המילים מעל {a,b} הינה רגולרית.

תהיי 'L שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילים ב a הינה שפה רגולרית.

דוגמה נוספת :נבחר מספר סופי של מילים וכמובן שאם שפה מכילה מספר סופי של מילים היא רגולרית.

תרגיל 2 הכלת שפות

נתון L וכן ש 'L רגולרית ומוכלת בה . האם L רגולרית ?

פתרון

יתכן שתהיה רגולרית ויתכן שלא.

דוגמה שלא : תהיי 'L השפה המכילה את המילה ab בלבד הינה רגולרית.

תהיי L שפת כל המילים מעל {a,b} המקיימים את התנאי $L = \{a^n b^n \quad | \; n > 0\}$

שידוע שאינה רגולרית.

דוגמה שכן : תהיי 'L השפה המכילה את המילה ab בלבד הינה רגולרית.

תהיי L שפת כל המילים מעל {a,b} המתחילות באות a .

L רגולרית ומכילה את 'L

תרגיל 3

בתרגיל זו שני סעיפים א ו ב שאין קשר ביניהם. ענה על שניהם.

א. לפניך השפה L מעל הא״ב $\{a,b\}$:

אוסף כל המילים המתחילות ב aaaa , מספר ה a ים במילה מתחלק ב 2 ללא שארית ,

הרצף aba מופיע במילה והרצף bbb אינו מופיע במילה.

הוכח שהשפה רגולרית.

ב. לפניך שתי שפות :

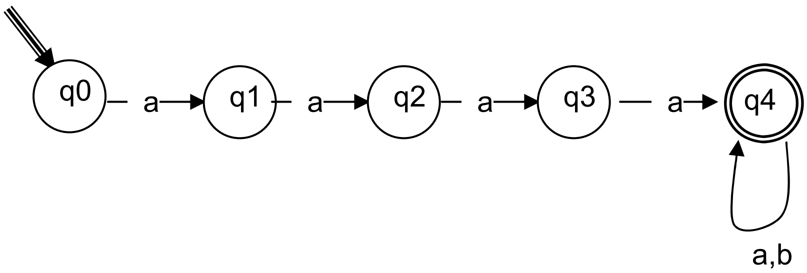
$L1= \{ (ab)^n (ab)^n \mid n>0 \}$

$L2= \{ (ba)^n (ab)^n \mid n>0 \}$

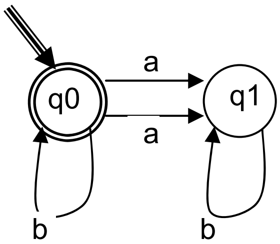
רשום **לגבי כל שפה** האם היא רגולרית או לא. אם כן, בנה את האוטומט, אם לא נסה לנמק מדוע.

פתרון א

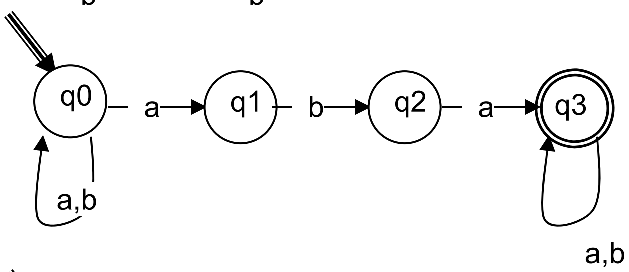
L1



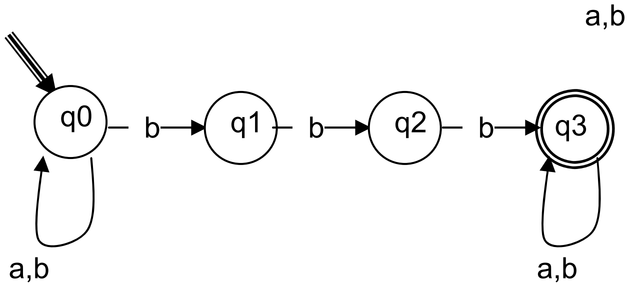
L2



L3



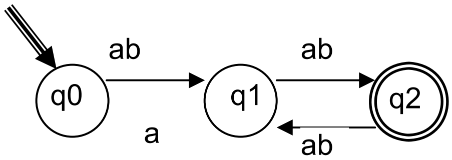
L4



$L= L1\cap L2\cap L3\cap(L4)$משלים

פתרון ב

L1 רגולרית וניתן לבנות לה אוטומט. (שים לב שעל הקשת יש ab)



L2 אינה רגולרית כי ניתן להסתכל על השפה כ $x^n y^n$ וקיימת תלות בין מספר ה x אים למספר ה y ים.

הוכחת אי רגולריות

קימות שפות שאינן רגולריות כלומר לא ניתן לבנות להן אס״ד. הדוגמה הפשוטה ביותר הינה $L = \{a^n b^n \mid \quad n > 0\}$. שימו לב שמספר ה aים צריך להיות שווה למספר ה bים.

לו היה תנאי נוסף והוא n<10 למשל כן ניתן היה לבנות אס״ד אך כיוון ש n אינו מוגבל לא ניתן.

הרעיון הכללי בהוכחת אי רגולריות הינה בדרך השלילה.
אנו מניחים שהשפה כן רגולרית ולכן ניתן לבנות לה אוטומט סופי. בחירה נבונה של קבוצה אינסופית של מילים בשפה וניסיון לבנות אוטומט תביא אותנו לסתירה כלומר שהאוטומט מקבל מילה שאסור שתתקבל ומכיוון שמספר המילים בשפה אינסופי נובע שהשפה אינה רגולרית.
מבנה רעיון ההוכחה חוזר על עצמו/דומה בכל המקרים.

מסקנה : לכל שפה שמספר המילים בה סופי ניתן לבנות אוטומט סופי דטרמיניסטי.

דוגמה 1 $L=\{a^n b^n \mid \quad n>0\}$

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה: $W = \{a , a^2 , a^3 , a^4 .....,a^m,...\}$

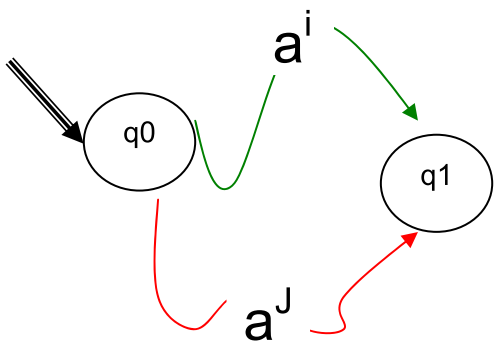
התחלות של מילים בשפה L .

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_i=a^i$, $w_j=a^J$

כך ש- $J \neq i$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נסמן את המצב המשותף של שתי המילים ב $\mathbf{q_1}$ באוטומט.



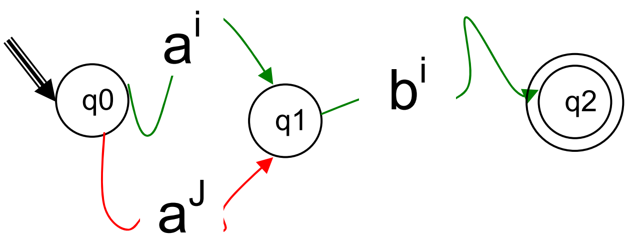
שתי המילים מגיעות למצב משותף $\mathbf{q_1}$ מכאן

שהמילה $a^i b^i$ שייכת לשפה לכן $\mathbf{q_2}$ מצב מקבל.

יוצא ש- $a^J b^i$ מתקבל בשפה עבור $J \neq i$

(המסלול מ $\mathbf{q_1}$ ל $\mathbf{q_2}$ משותף לשתי המילים),

וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משותף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר.

ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיעה למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A (באוטומט) , בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

תבנית הוכחה לשפה אי רגולרית

L={   }

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

(בחלק מהמקרים ניתן לבחור בשלב זה תת קבוצה)

בואו ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה: $W = \{w1 , w2 , w3 ,...\}$

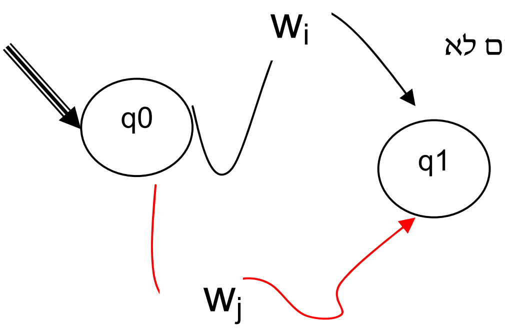
התחלות של מילים בשפה L.

כיוון ש **W** אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות W_i , W_j

כך ש- J ? i (=,≠,<,>) מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

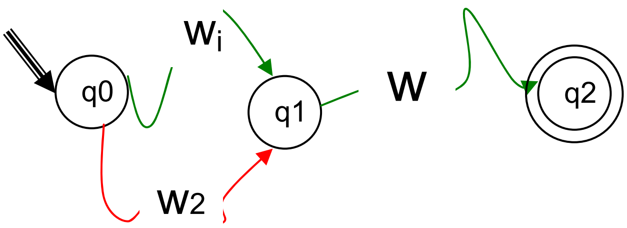
כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נסמן את המצב המשותף של שתי המילים ב $\mathbf{q_1}$ באוטומט.



המילה W_i שייכת לשפה לכן $\mathbf{q_2}$ מצב מקבל והמילה W_iW מתקבלת. יוצא שגם - W_jW מתקבלת

בשפה (המסלול מ $\mathbf{q_1}$ ל $\mathbf{q_2}$ משותף לשתי המילים), וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משותף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר.

ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A ,

בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 2 $L = \{a^n b^k \mid \quad n > 0, n <> k\}$

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה: $W = \{a , a^2 , a^3 , a^4 ....., a^m ,...\}$

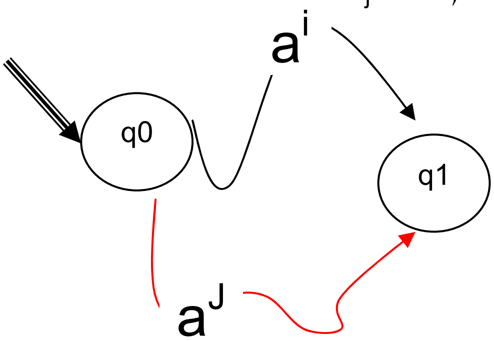
התחלות של מילים בשפה L עבור m כלשהו.

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_i=a^i$, $w_j=a^J$

כך ש- $J \neq i$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

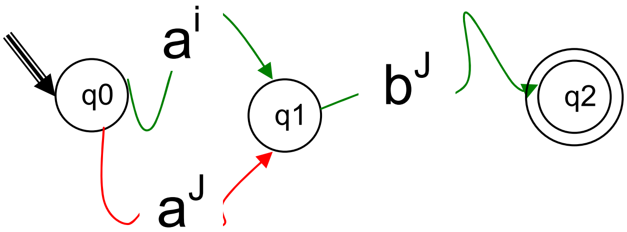
כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נסמן את המצב המשותף של שתי המילים ב $\mathbf{q_1}$ באוטומט.



המילה $a^i b^J$ שייכת לשפה לכן $\mathbf{q_2}$ מצב מקבל. יוצא ש- $a^J b^J$ מתקבל בשפה

עבור $J \neq i$ (המסלול מ $\mathbf{q_1}$ ל $\mathbf{q_2}$ משותף לשתי המילים), וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משותף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר.

ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A ,

בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 3 L={מעל {a,b} כך שמספר ה a ים קטן ממספר ה b ים}

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונסתכל על תת-הקבוצה הבאה של מילים בשפה *L* $L'=\{a^nb^{n+1} \quad | \, n\geq 0\}$

ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה: $W = \{a , a^2 , a^3 , a^4.....,a^m,...\}$

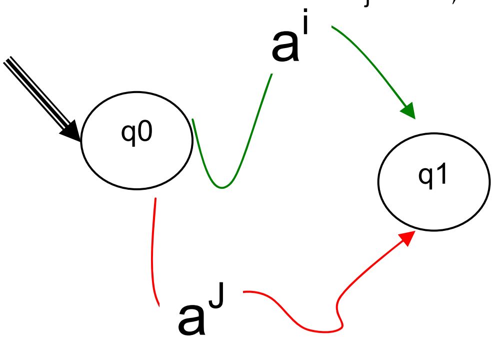
התחלות של מילים בשפה 'L עבור m כלשהו.

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_i=a^i$, $w_j=a^J$

כך ש- $J \neq i$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

כן אזי היה צורך באינסוף מצבים. נניח כי $J > i$.

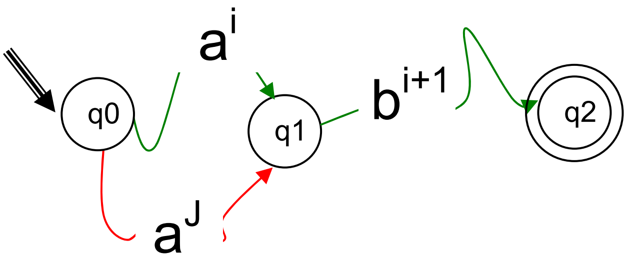
נסמן את המצב המשותף של שתי המילים ב q_1 באוטומט.



המילה a^ib^{i+1} שייכת לשפה לכן q_2 מצב מקבל. יוצא גם ש- a^Jb^{i+1} מתקבלת בשפה.

(המסלול מ q_1 ל q_2 משותף לשתי המילים). אך $J > i$ ומכאן נובע שמספר ה a ים במילה a^Jb^{i+1} שווה או

גדול ממספר ה b ים במילה וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משותף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר.

ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A ,
בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 4 $L = \{a^i b^j c^k \mid \quad i > 0, j \geq 0, k = i + j\}$

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

נבחר את J להיות אפס . מכאן נובע ש I צריך להיות שווה ל k. ומכאן ראה דוגמה מספר 1.

(כמובן שניתן לפתור גם על ידי קיבוע של i).

דוגמה 5 (חלוקה ושארית בשלמים)

א. נתונה השפה $\{a^{10}c^{n}b^{n/10} \quad | \ n \geq 0\}$ האם השפה רגולרית? הוכח תשובתך באופן מפורט.

ב. נתונה השפה : $\{a^{10}c^{n}b^{n\ \%\ 10} \quad | \ n \geq 0\}$ האם השפה רגולרית?
נמק תשובתך היטב, באופן מילולי (אין צורך להוכיח).

<u>תשובה</u>

א. השפה $L=\{a^{10}c^{n}b^{n/10} \quad | \ n \geq 0\}$ אינה שפה רגולרית.

ההוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמינסטי A הבונה אותה.

תהי הקבוצה האינסופית הבאה:

$W = \{a^{10}c^{10}, a^{10}c^{20}, a^{10}c^{30}, ..., a^{10}c^{10i}, ...\}$

התחלות של מילים בשפה L עבור m כלשהו.

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_i=a^{10}c^{10i}$, $w_j= a^{10}c^{10j}$ **כך ש-** $i\neq j$ מתוך הקבוצה W.

נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משתף q_t באוטומט A. משם נשרשר כל מילה עם b^i

שתי המילים מגיעות למצב משתף q_r , מאחר ויש להם מסלול משותף.

המילה $a^{10}c^{10i}b^i$ שייכת לשפה לכן q_r מצב מקבל. יוצא **גם ש-** $a^{10}c^{10j}\ b^i$ גם בשפה עבור $i\neq j$, וזה בניגוד לכללי השפה ($10j/10\neq i$).

לכן הנחתינו ששתי המילים מגיעות למצב משותף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר. ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן יש אינסוף מצבים ב- A , בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

ב.

השפה: $\{a^{10}c^{n}b^{n\ \%\ 10} \quad | \ n \geq 0\}$ היא שפה רגולרית.

ניתן לבנות אותה ע"י איחוד של 10 שפות רגולריות. $n\ \%\ 10 =\{t \ | \ 0=< t =< 9\}$

$$\{a^{10}c^{n}b^{n\ \%\ 10} \quad | \ n \geq 0\} = \{a^{10}c^{n}b^{0} \cup a^{10}c^{n}b^{1} \cup a^{10}c^{n}b^{2} \cup ....\cup a^{10}c^{n}b^{9}\}$$

כל אחד מאברי האיחוד הוא שפה רגולרית (ניתן לבניה ע"י אוטומט סופי דטרמיניסטי או שרשור של 3 שפות רגולריות). מכאן עלפי תכונות הסגירות, איחוד סופי של שפות רגולריות הוא רגולרי.

דוגמה 6 $L = \{c^2(ab)^{2n}c^k \mid \quad n \geq 0, n \neq k\}$

נתונה השפה הבאה מעל הא"ב {a,b,c}

א. האם השפה רגולרית, הוכח תשובתך באופן מפורט.

ב. האם השפה היא חופשית הקשר, הוכח תשובתך באופן מלא.

נוכיח כי השפה אינה רגולרית בדרך השלילה.

נניח שהשפה היא רגולרית, כלומר קיים אוטומט סופי A שיש בו מספר סופי של מצבים המקבל אותה.

נסתכל על הקבוצה האינסופית הבאה:

$W=\{c^2,\ c^2(ab)^2, c^2(ab)^4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, c^2(ab)^{2n}\ldots\ldots\}$

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $c^2(ab)^{2j}$, $c^2(ab)^{2i}$, $i\neq j$ שמגיעות לאותו מצב q באוטומט A.

מכאן שהמילה $c^2(ab)^{2j}c^i$ מגיעה למצב מקבל לפי הגדרת השפה. לכן גם המילה $c^2(ab)^{2i}c^i$ מגיעה לאותו מצב מקבל כאשר $i\neq j$, וזה בסתירה להגדרת השפה.

לכן כל אחת מן המילים בקבוצה W מגיעה למצב אחר, ומשום שהקבוצה היא אינסופית יש אינסוף מצבים באוטומט בסתירה להגדרת אוטומט סופי.
לכן ההנחה שגויה והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 7 $L=\{(ab)^i a^j c^k \mid \quad k\neq i+j \quad i,j>0\}$

נתונה השפה שלעיל מעל הא"ב {a,b,c}

האם השפה הבאה היא רגולרית? הוכח תשובתך באופן מפורט.

נוכיח כי השפה $L=\{(ab)^i a^j c^k \mid \quad k\neq i+j \quad i,j>0\}$ אינה רגולרית בדרך השלילה.

נניח שהשפה היא רגולרית, כלומר קיים אוטומט סופי A שיש בו מספר סופי של מצבים המקבל אותה.

נסתכל על הקבוצה האינסופית הבאה:

$W=\{(ab)a^m,\ (ab)^2 a^m, (ab)^3a^m, ..., (ab)^na^m......\}$

נניח כי קיימות בקבוצה זו שתי מילים שונות $(ab)^ia^m$, $(ab)^ja^m$ **$i\neq j$** שמגיעות לאותו מצב q באוטומט A.

ממצב זה q נמשיך להפעיל את האוטומט על הרצף c^{i+m}, נקבל כי המילים $(ab)^ia^mc^{i+m}$

ו $(ab)^ja^mc^{i+m}$ מגיעות לאותו מצב באוטומט $(i\neq j)$.

המילה $(ab)^ja^mc^{i+m}$ מגיעה למצב מקבל לפי הגדרת השפה. $j+m=i+1+m<i+m$

לכן גם המילה $(ab)^ia^mc^{i+m}$ מגיעה לאותו מצב מקבל, וזה בסתירה להגדרת השפה.

לכן כל אחת מן המילים בקבוצה W מגיעה למצב אחר, ומשום שהקבוצה היא אינסופית יש אינסוף מצבים באוטומט בסתירה להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה היא שגויה והשפה אינה רגולרית.

טעויות שכיחות בהוכחת אי רגולריות

דוגמה 8 הוכחה שגויה $L = (a^n b^k \quad | n < k < 2n \, , n > 0\}$

נתונה השפה שלעיל :

א. אילו מהמילים הבאות בשפה a^5b^6, a^3b^6, a^2b^3

ב. הוכח כי השפה L היא אי רגולרית.

<u>תשובה</u>

א. המילים a^5b^6, a^2b^3 הן בשפה

ב. השפה L היא אי רגולרית, נוכיח בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

תהי הקבוצה האינסופית הבאה:

$$W = \{ a^2 , a^3 , ...,a^n ,......\}$$

התחלות של מילים בשפה L

נבחר שתי התחלות שונות $w_i=a^i$, $w_j= a^{i+1}$ עבור i>1 , מתוך הקבוצה W.

נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משתף q_t באוטומט A. משם נשרשר כל מילה עם b^{2i}

(הטעות : לא ניתן להניח כי קיימות שתי התחלות $w_i=a^i$, $w_j= a^{i+1}$ שמגיעות למצב משותף).

....

הוכחה נכונה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה :

$$L = (a^n b^k \quad | \, n < k < 2n \,,\, n > 0\}$$

$$W = \{a, a^2, a^3, ...\}$$

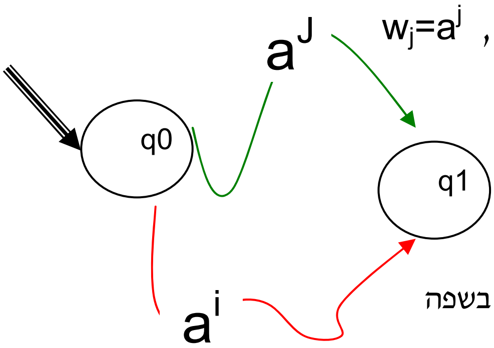
התחלות של מילים בשפה L עבור m כלשהו.

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_i=a^i$, $w_j=a^j$

כך ש- $i \neq j$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משותף q_1 באוטומט A ונניח ש$j>i$.

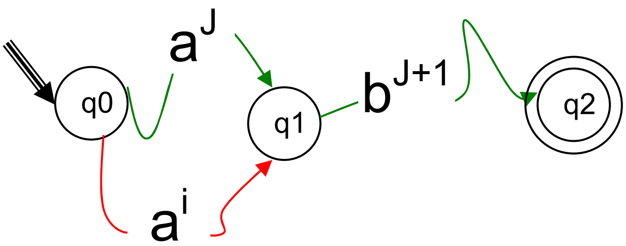


המילה $a^j b^{j+1}$ שייכת לשפה לכן q_2 מצב מקבל. יוצא גם ש- $a^i b^{j+1}$ גם בשפה

(המסלול מ q_1 ל q_2 משותף לשתי המילים) אך **i** גדול מ **j** לפחות באחד כלומר הוא

לפחות **j+1** אך החזקה של b צריכה להיות גדולה מהחזקה של a

וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משתף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר. ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A , בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 9 הוכחה שגויה $L = (a^n b^k a^n \quad | k, n \geq 0\}$

נתונה השפה שלעיל : (להשלים)

הוכח כי השפה L היא אי רגולרית.

פתרון

השפה L היא אי רגולרית, נוכיח בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

נבחר את k להיות אפס. (עדיין קבוצת המילים אינסופית).

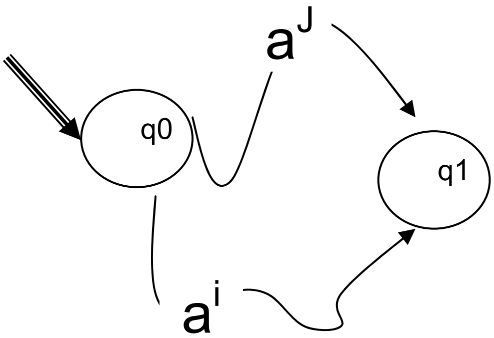
תהי הקבוצה האינסופית הבאה:

$$W = \{ a^2 , a^3 , ...,a^n ,......\}$$

התחלות של מילים בשפה L

נבחר שתי התחלות שונות $w_i= a^i$, $w_j= a^j$ עבור , מתוך הקבוצה W.

נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משתף q_1 באוטומט A. **<u>(הטעות : אין לומר נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משותף. (ראה דוגמה קודמת)</u>**



משם נשרשר כל מילה עם b^i.

שתי המילים מגיעות למצב משתף q_r , מאחר ויש להם מסלול משותף.

המילה a^ia^i שייכת לשפה לכן q_r מצב מקבל. יוצא גם ש- a^ja^i גם בשפה, וזה בניגוד לכללי השפה.

<u>!!!!!</u> מדוע a^ja^i אינו בשפה. אם אינו בשפה חייב להתקיים ש i זוגי ו j אי זוגי או להיפך. כלומר יש פה הנחה על שתי ההתחלות $w_i= a^i$, $w_j= a^j$ שהזוגיות שלהן שונה ושמגיעות לאותו מצב.. אך ניתן לבנות אוטומט שבו זוגיות a משתנה.

הוכחה נכונה

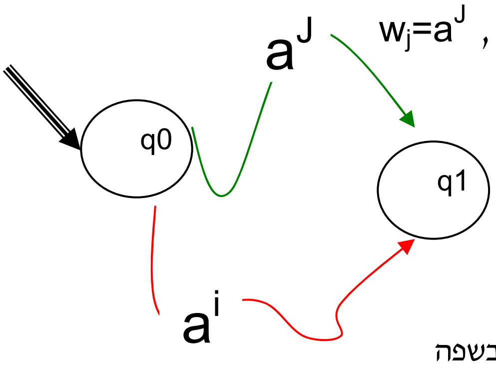
הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה (**נבחר את k להיות 1**) :

$$W = \{a , a^2 , a^3 , a^4.....,a^m,...\}$$

התחלות של מילים בשפה L עבור m כלשהו.



כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_j=a^J$, $w_i=a^i$

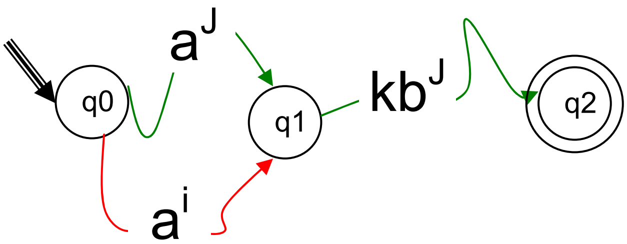
כך ש- $J \neq i$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נניח כי שתי המילים מגיעות למצב משותף **q_1** באוטומט A ונניח $j>i$.

המילה a^Jkb^J שייכת לשפה לכן **q_2** מצב מקבל. יוצא גם ש- a^ikb^j גם בשפה

אך I שונה מ J וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה.



לכן ההנחה שהנחנו ששתי המילים מגיעות למצב משתף אינה נכונה , אלא כל מילה מגיעה למצב אחר. ומאחר והקבוצה W היא אינסופית יוצא שכל מילה מגיע למצב אחר . ומכאן שיש אינסוף מצבים ב- A , בניגוד להגדרת אוטומט סופי.

לכן ההנחה שקיים אוטומט סופי הבונה את השפה L אינה נכונה, והשפה אינה רגולרית.

דוגמה 10 הוכחה שגויה L = {כל המילים מעל a,b}

הוכח שהשפה אינה רגולרית

הוכחה

הוכחה בדרך השלילה.

נניח שהשפה רגולרית וקיים אוטומט סופי דטרמיניסטי A הבונה אותה.

בואו ונסתכל על תת-הקבוצה הבאה של מילים בשפה *L* $L' = \{a^n b^n \quad | n \geq 0\}$

ונבחן את הקבוצה האינסופית הבאה : $W = \{a , a^2 , a^3 , a^4.....,a^m,...\}$

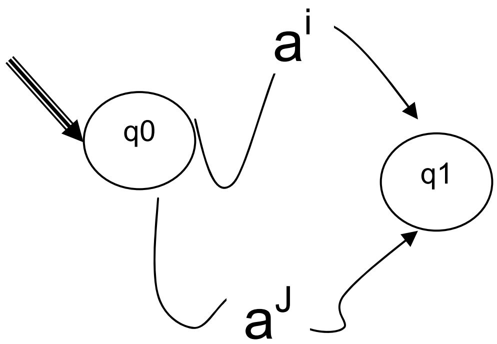
התחלות של מילים בשפה 'L עבור m כלשהו.

כיוון ש W אינסופית חייבים להיות בה לפחות שתי מילים שונות $w_j=a^J$, $w_i=a^i$

כך ש- $J \neq i$ מתוך הקבוצה W המגיעות לאותו מצב שאם לא

כן אזי היה צורך באינסוף מצבים.

נסמן את המצב המשותף של שתי המילים ב q_1 באוטומט.

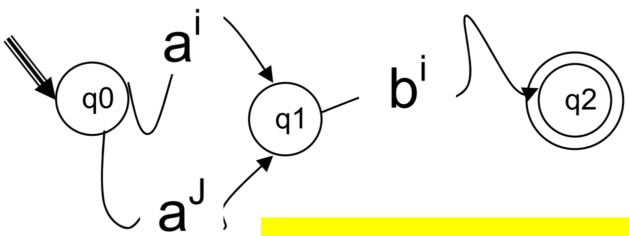


שתי המילים מגיעות למצב משתף q_1 מכאן

שהמילה a^ib^i שייכת לשפה לכן q_2 מצב מקבל.

יוצא ש- a^Jb^i מתקבל בשפה עבור $J \neq i$,

וזה בניגוד לכללי/חוקי השפה 'L.



!!!!! המילה a^Jb^i כן מתקבלת בשפה L . אין להסתכל בשלב זה על השפה 'L אלא על L.

תרגילים בהוכחת אי רגולריות

לכל שפה מהשפות הבאות א. רשום את המילה הקצרה ביותר. ב. רשום 4 מילים נוספות בשפה.

ג. אם השפה רגולרית בנה אוטומט ואם לא הוכח שאינה וציין מה גורם לה להיות אי רגולרית.

1. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c} $L = \{(ab)^i a^j c^k \mid \quad k \neq i + j \quad i, j > 0\}$

2. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b} $L = \{((abb)^n (ba)^{2n})^m \mid \quad m \geq 0, n \geq 0\}$

3. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c} $L = \{a^n \cdot c^k \cdot b^{2n} \mid n \geq 0, \; k \geq 0\}$

4. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c} $L = \{c^k b^{2n} (aab)^n c^j \quad \mid k, n, j >= 0, \; k <> j\}$

5. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c} L= $\{a^n c^m b c^{m-n} \mid \quad m > n > 0\}$

6. {$a^i b^j c^k$ I k היא השארית המתקבלת מחלוקת i ב- 3 ; i , j , k>=0}

7. נתונה השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c} בה מספר ה a ים ועוד מספר ה b ים זוגי.

8. השפה L היא אוסף כל המילים המכילות את הצירוף abba, מספר אותיות ה- c הוא זוגי, ומספר אותיות ה- a גדול ממספר אותיות ה- b.

9. שפת כל המילים מעל {a,b} שבהן מספר ה-a קטן ממספר ה-b, אבל ההפרש הוא לכל היותר 3.

10. שפת כל המילים מעל {a,b} שבהן מספר ה-a קטן ממספר ה-b, וגם ההפרש הוא לכל היותר 3, וגם בכל רישא של המילה - ההפרש הוא לכל היותר 3.

11. L= $\{a^n b^m c^k \mid \quad m,n,k > 0\}$

12. שפת כל הביטויים החשבוניים החוקיים עם סוגריים, למשל 3+2*(4+5).
הקבוצה W מורכבת מביטויי חשבוני עם i פותחים, לכל i.

13. שפת כל הביטויים החשבוניים החוקיים בלי סוגריים.

14. $L = \{a^i b^{2j} c^k \quad \mid i > 0, \; j >= 0, k = i + j\}$

15. נתונות השפות הבאות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$$L1=\{\ a^n\ b^k \quad n,k \geq 0\ \}$$

$$L2=\{\ b^k\ a^n \quad n \neq k \quad k \geq 0\ ,\ n \geq 1\ \}$$

האם $L1$ רגולרית? נמק את תשובתך.

האם $L2$ רגולרית? נמק את תשובתך.

האם $L2 * L1$ רגולרית? נמק את תשובתך.

האם $L2 \cap L1$ רגולרית? נמק את תשובתך.

16. נתונות השפות הבאות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$$L1=\{\ a^n\ b^k \quad n \neq k \quad n,k \geq 0\ \}$$

$$L2=\{\ b^k\ a^n \quad n \neq k \quad n,k \geq 0\ \}$$

האם $L1$ רגולרית? נמק את תשובתך.

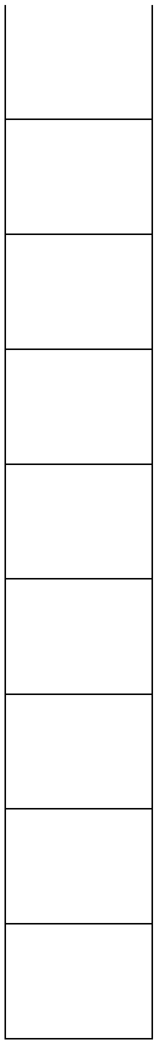
האם $L2$ רגולרית? נמק את תשובתך.

האם $L2 * L1$ רגולרית? נמק את תשובתך.

אוטומט מחסנית

תיאור מתמטי פורמאלי של אוטומט מחסנית A הוא באמצעות השביעייה הבאה:

$$A = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \perp, F\}$$



כאשר:

Q היא קבוצת מצבי האוטומט.

Σ הוא א״ב הקלט.

Γ הוא א״ב המחסנית.

δ היא פונקציית המעברים.

q_0 הוא המצב ההתחלתי.

$\dashv$ או $\perp$ היא תחתית המחסנית.

$F \subseteq Q$ היא קבוצת המצבים המקבלים.

הסבר ינתן בהמשך

ראינו בפרק הוכחת אי רגולריות שיש שפות שלא ניתן לבנות להן אוטומט סופי דטרמיניסטי. לדוגמה :

$$L=a^{n}b^{n} \quad n\geq 0 \qquad\qquad L=a^{2n+1}b^{n-m}a^{m-1} \quad n\geq 0$$

כפי שראינו בהוכחת אי רגולריות לשפות אלה לא ניתן לבנות אוטומט סופי דטרמיניסטי. הסיבה הינה שיש צורך בספירה (שאינה מוגבלת בחסם עליון) ולכן לא ניתן לעשות זאת באס״ד. לצורך כך אנו נשתמש במחסנית.

הרעיון המרכזי : המחסנית משמשת ככלי ספירה. הספירה נעשית על ידי הכנסת תווים למחסנית (לרוב המקרים שאנו נטפל בהם) והוצאתם.

דוגמה פשוטה : $L= a^{n}b^{n} \quad n\geq 0$

הרעיון : על ה a הראשונה נכניס S על כל ל a נוספת נכניס A למחסנית והחל מה b הראשונה על כל b נוציא/נשלוף A מהמחסנית ועל ה b האחרונה נשלוף S.

דוגמאות לפעולות

מה עושים	מצב ראש המחסנית	האות/תו הנבדק	פירוש
$\perp$A	$\perp$	a	כשהמחסנית ריקה והתו הנבדק a אז דחוף A למחסנית
דחוף A	$\perp$	a	כשהמחסנית ריקה והתו הנבדק a אז דחוף A למחסנית
AA	A	a	כשבראש המחסנית A והתו הנבדק a אז דחוף A למחסנית (AA פירושו בעצם הוספת A)
שלוף A	A	b	כשבראש המחסנית A והתו נבדק b אזשלוף A

הסימון למחסנית ריקה הינו : $\perp$

הסימון למילה הריקה הינו : ε

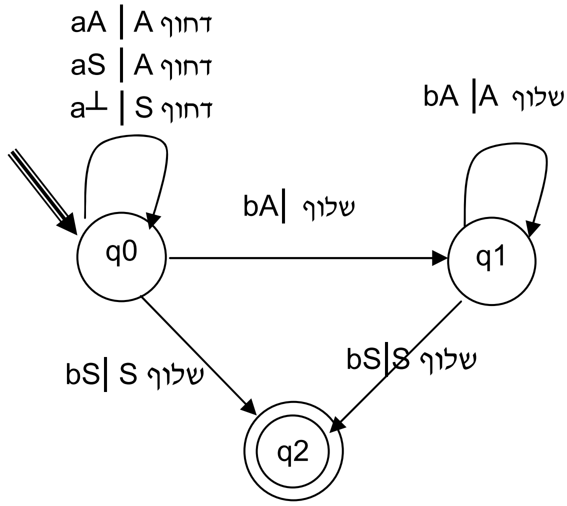
שימו לב : אין להוציא ממחסנית יותר מאות אחת

שפה שניתן לאמת אותה באמצעות אוטומט מחסנית נקראת חופשית הקשר. משפחת השפות חופשיות ההקשר כוללת גם את השפות הרגולריות.

תרגילים פתורים והסברים באוטומט מחסנית

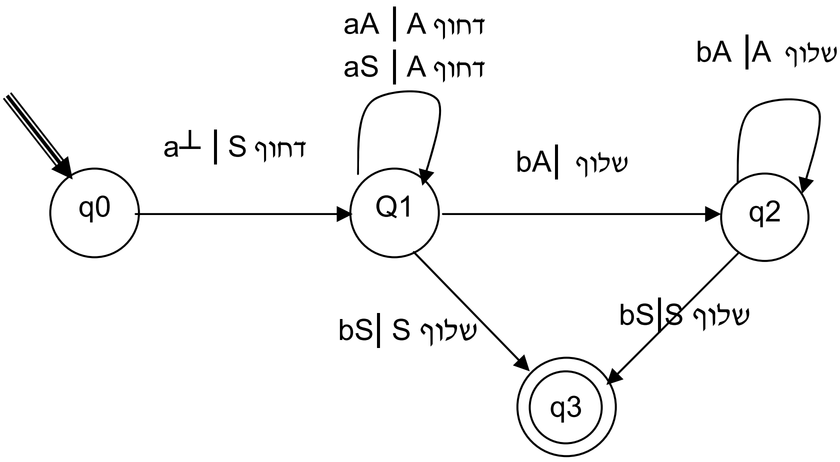
$L=a^n b^n \quad n>0$

המילה הקצרה ביותר ab
הרעיון : על ה aהראשונה נדחוף S
על כל a נדחוף ועל כל b נשלוף
על ה b האחרונה נשלוף S



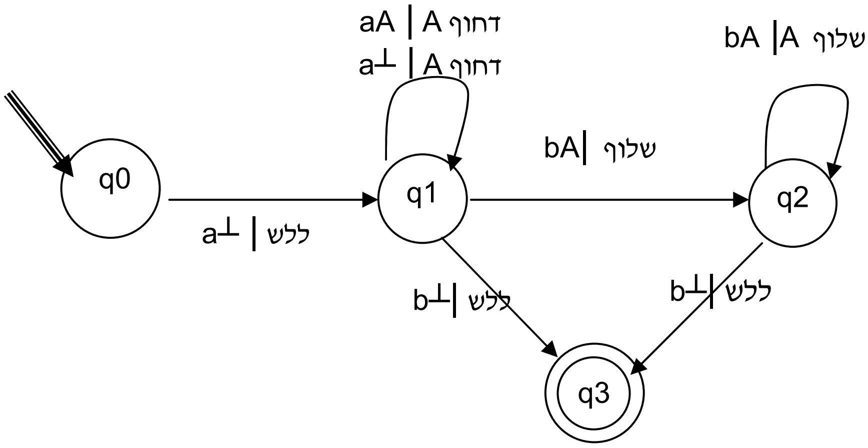
- שימו לב ש n>0.
- תפקיד מצב q0 הינו לדחוף A על כל a (S על מחסנית ריקה)
- תפקיד מצב q1 הינו לומר שהחל מפה יכול להופיע רק b ואסור שיופיע a כמו כן תפקידו לשלוף A על כל b .
- תפקיד מצב q2 הינו שהגענו למצב שבו מספר ה a שווה למספר ה b .

פתרון נוסף



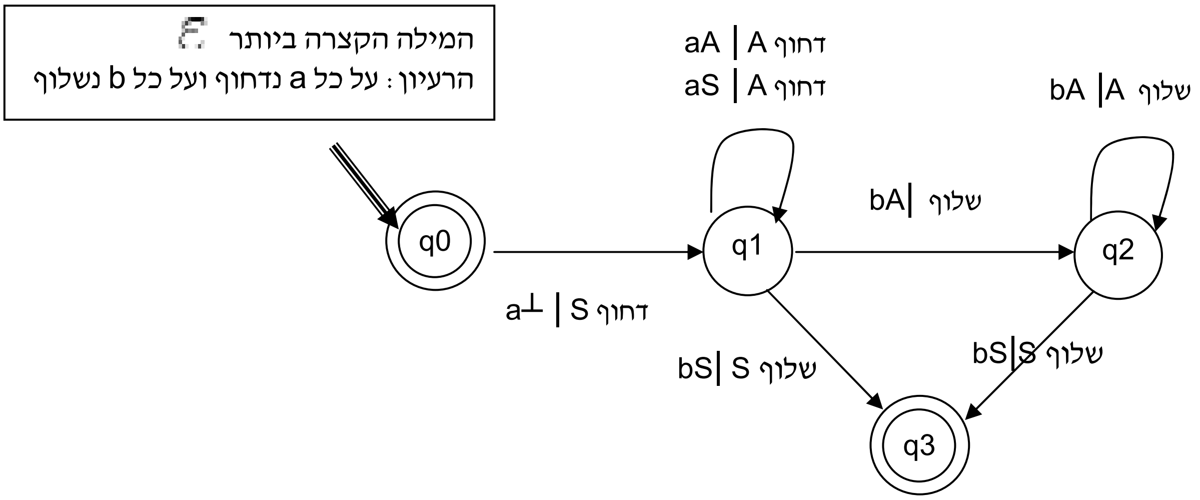
פתרון נוסף

הינו על ה a הראשונה לא להכניס שום דבר



כפי ששמתם לב על האות הראשונה מוכנס S למחסנית. מטרת הכנסת ה S הינה זיהוי בהוצאה מהמחסנית שהגענו לתחתית המחסנית. יש מקרים בהם אין צורך ב S וניתן לפתור את הבעיה בלעדיה.

$L=a^nb^n \quad n\geq0$



על כל a דוחפים A ועל כל b מוציאים. **שימו לב שעבור מצב שאינו חוקי האוטומט נתקע.**
(למשל אם המילה מתחילה ב b (והמחסנית ריקה) אזי האפשרות הזאת אינה קיימת ולכן אנו נתקעים).

מעבר המילה aaabbb באוטומט (מעקב אחר המילה aaabbb)

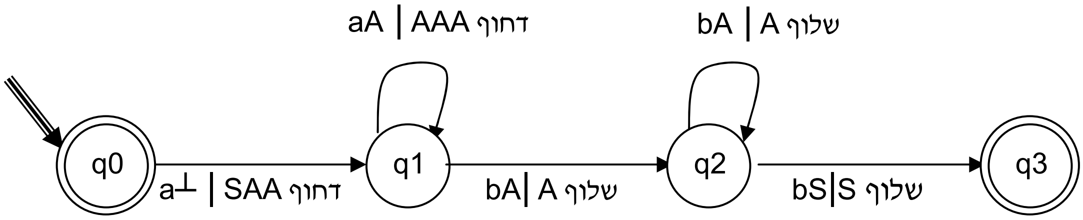
מצב	אות נבדקת	ראש המחסנית	פעולה	עוברים למצב	מצב מחסנית אחרי
q0	**a**	⊥	**דחוף S**	**q1**	⊥S
q1	**a**	S	**דחוף A**	**q1**	⊥SA
q1	**a**	A	**דחוף A**	**q1**	⊥SAA
q1	**b**	A	**שלוף A**	**q2**	⊥SA
q1	**b**	A	**שלוף A**	**q2**	⊥S
q2	**b**	A	**שלוף S**	**(מקבל)q3**	⊥

תרגילים שבהם מספר ה a גדול או קטן ממספר ה bים בכפולה.

$L=a^nb^{3n}\quad n\geq 0$

פתרון א (פשוט יותר מפתרון ב)

המילה הקצרה ביותר ε
הרעיון : על כל a נדחוף AAA
על כל b נשלוף A

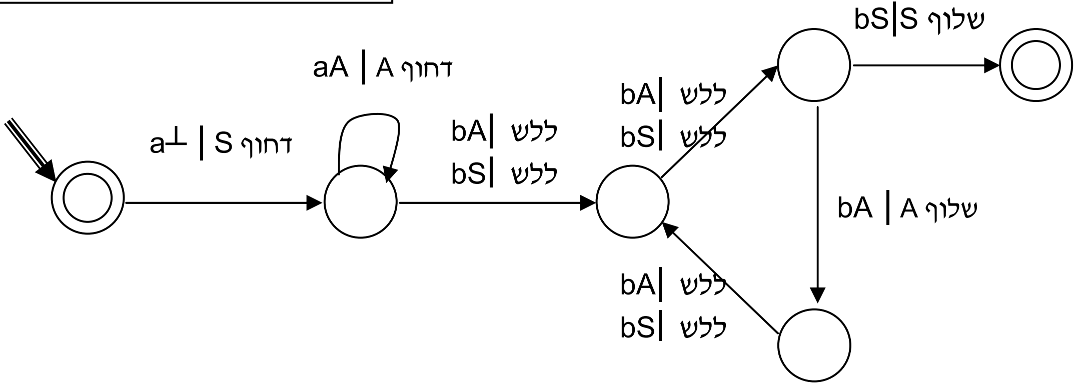


מעבר המילה abbb באוטומט (טבלת מעקב)

מצב	אות נבדקת	ראש המחסנית	פעולה	עוברים למצב	מצב מחסנית אחרי
q0	**a**	⊥	**דחוף SAA**	**q1**	⊥SAA
q1	**b**	A	**שלוף A**	**q1**	⊥SA
q1	**b**	A	**שלוף A**	**q1**	⊥S
q1	**b**	S	**שלוף S**	**q3(מקבל)**	⊥

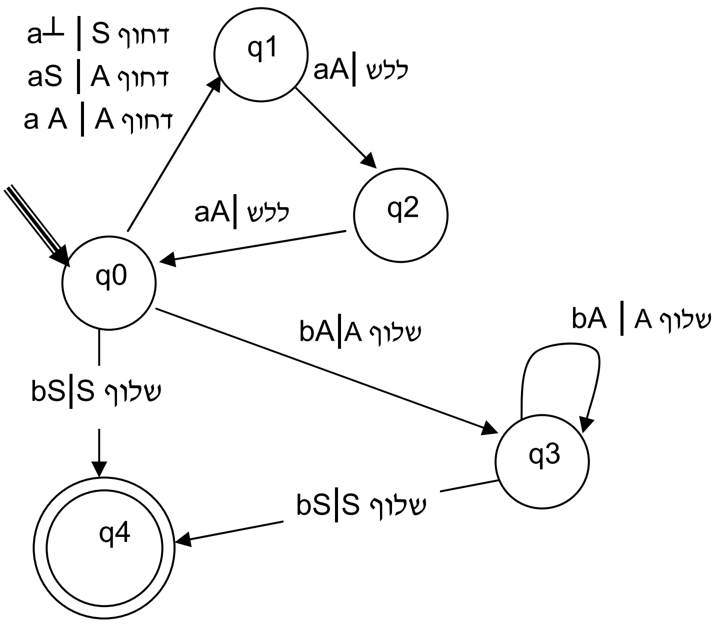
פתרון ב

המילה הקצרה ביותר ε
הרעיון : על כל a נדחוף A
על כל שלושה b נשלוף A



$L=a^{3n}b^{n}\ \ n>0$

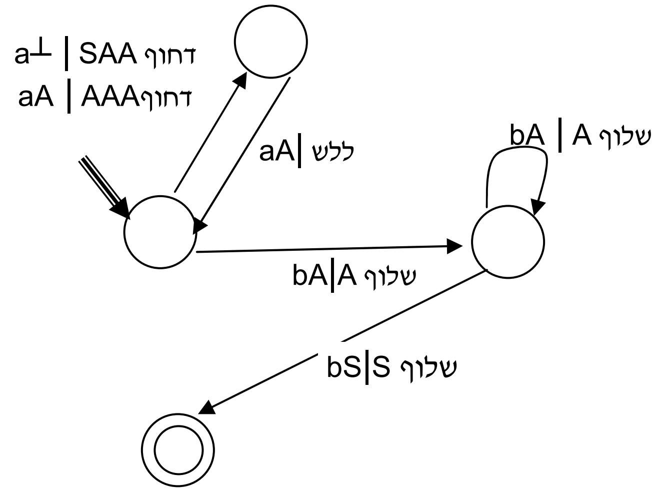
המילה הקצרה ביותר aaab
הרעיון : על כל שלושה a נדחוף A
על כל b נשלוף A



תאור אוטומט מחסנית(שלעיל) באמצעות טבלה

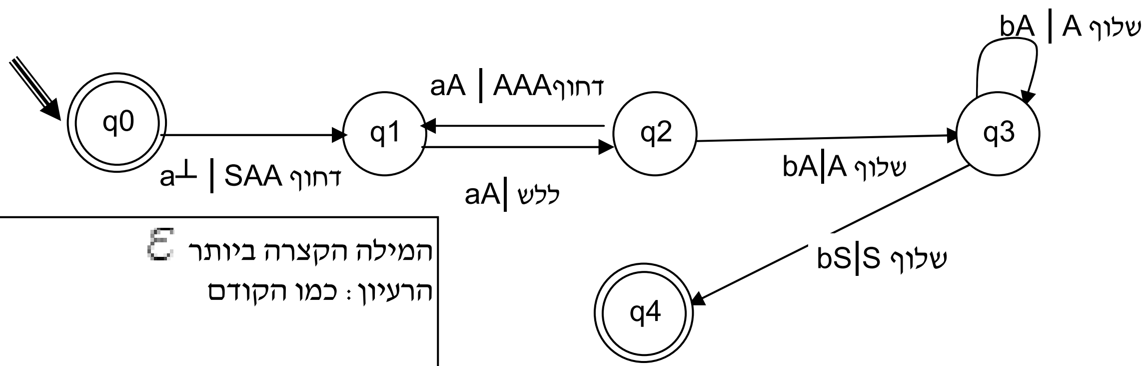
מצב	אות נבדקת	ראש המחסנית	פעולה	עוברים למצב
q0	**a**	⊥	**דחוף S**	**q1**
q0	**a**	S	**דחוף A**	**q1**
q0	**a**	A	**דחוף A**	**q2**
q0	**b**	A	**שלוף A**	**q2**
q0	**b**	S	**שלוף S**	**q4**
q1	**a**	A	**ללש**	**q2**
q2	**a**	A	**ללש**	**q0**
q3	**b**	A	**שלוף A**	**q3**
q3	**b**	S	**שלוף S**	**q4(מקבל)**

$L=a^{2n}b^{3n}$ $n>0$



המילה הקצרה ביותר aabbb
הרעיון : על כל 2 a נדחוף AAA
על כל b נשלוף A

$L= a^{2n}b^{3n}$ $n\geq 0$



המילה הקצרה ביותר ε
הרעיון : כמו הקודם

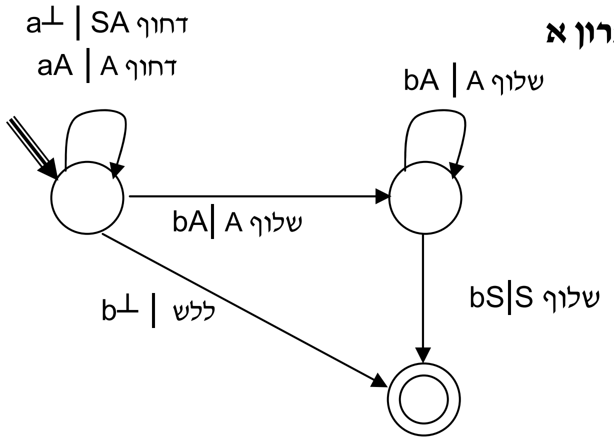
מעבר המילה aaaabbbbbb באוטומט (טבלת מעקב)

מצב	אות נבדקת	ראש המחסנית	פעולה	עוברים למצב	מצב מחסנית אחרי
q0	**a**	⊥	**דחוף SAA**	**q1**	⊥SAA
q1	**a**	A	**ללש**	**q2**	⊥SAA
q2	**a**	A	**דחוף AAA**	**q1**	⊥SAAAAA
q1	**a**	A	**ללש**	**q2**	⊥SAAAAA
q2	**b**	A	**שלוף A**	**q3**	⊥SAAAA
q3	**b**	A	**שלוף A**	**q2**	⊥SAAA
q3	**b**	A	**שלוף A**	**q3**	⊥SAA
q3	**b**	A	**שלוף A**	**q3**	⊥SA
q3	**b**	A	**שלוף A**	**q3**	⊥S
q3	**b**	S	**שלוף S**	**(מקבל)q4**	⊥

תרגילים שבהם מספר ה a גדול או קטן ממספר ה bים בקבוע.

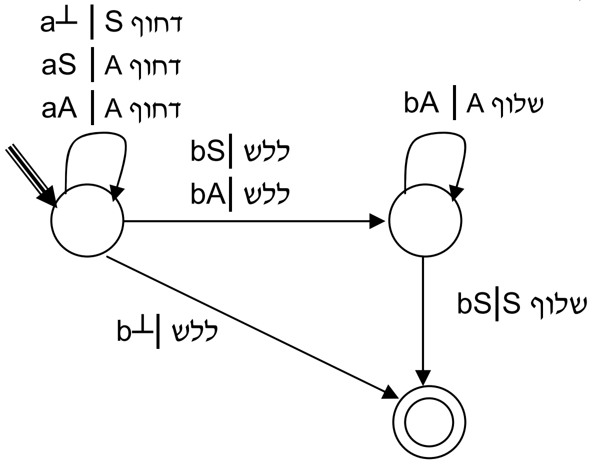
$L=a^nb^{n+1}\ \ n\geq 0$

פתרון א



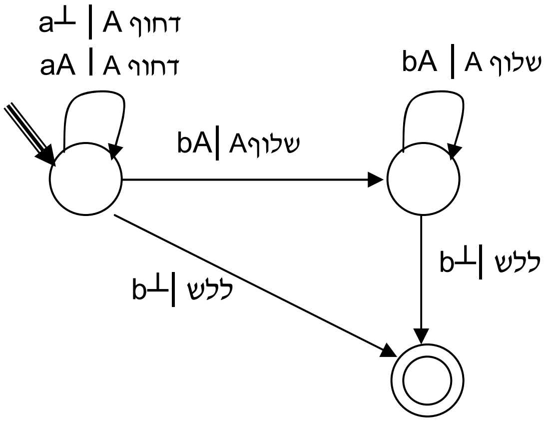
המילה הקצרה ביותר b
הרעיון: על ה a הראשון נדחוף SA
על כל a נדחוף A
על כל b נשלוף A

פתרון ב



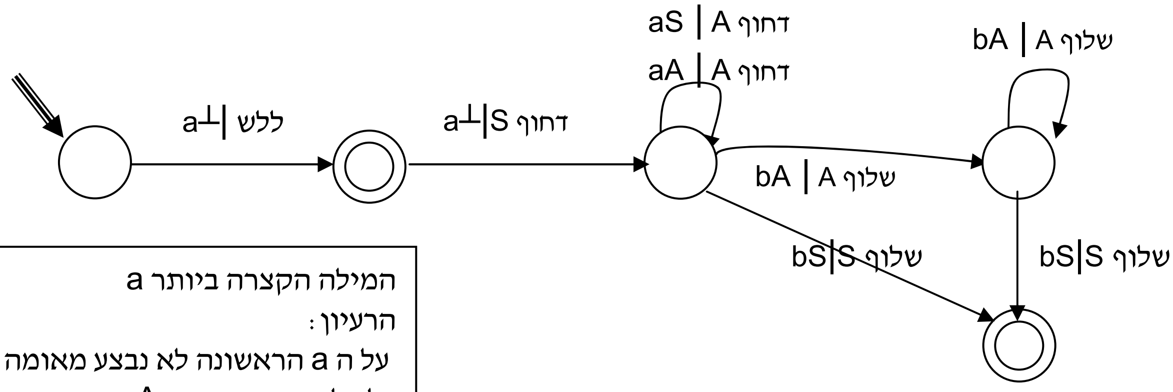
המילה הקצרה ביותר b
הרעיון: על כל a נדחוף A(ראשון S)
עבור ה b הראשון לא נבצע מאומה
על כל b נשלוף A

פתרון ג



המילה הקצרה ביותר b
אין צורך ב S
הרעיון: על כל a נדחוף A
על כל b נשלוף A
עבור b ומחסנית ריקה נעבור למקבל

$L=a^{n+1}b^n \quad n\geq 0$

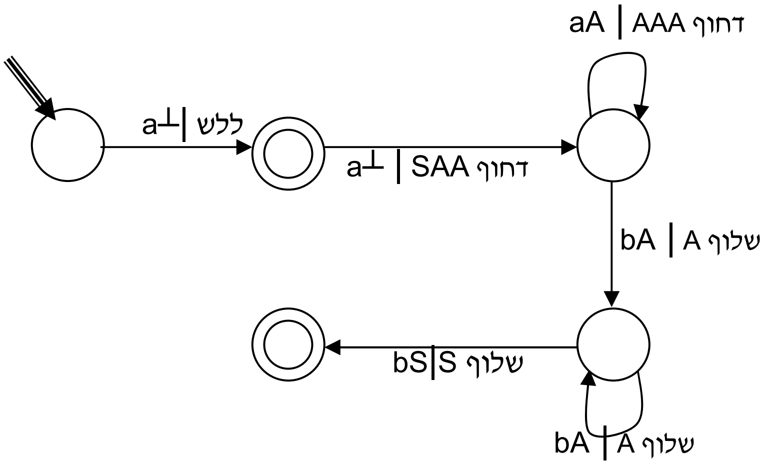


המילה הקצרה ביותר a
הרעיון :
על ה a הראשונה לא נבצע מאומה
על כל a נוסף נדחוף A
על כל b נשלוף A

תרגילים בהם יש שילוב של כפולה וקבוע (שילוב של תרגילים קודמים)

$L=a^{n+1}b^{3n}$ $n\geq0$

נציב את ה n הנמוך ביותר ונקבל את
המילה a מכאן נובע
המילה הקצרה ביותר a
הרעיון :
על ה a הראשונה לא נבצע מאומה
על כל a נוסף נדחוף AAA
על כל b נשלוף A



תרגיל

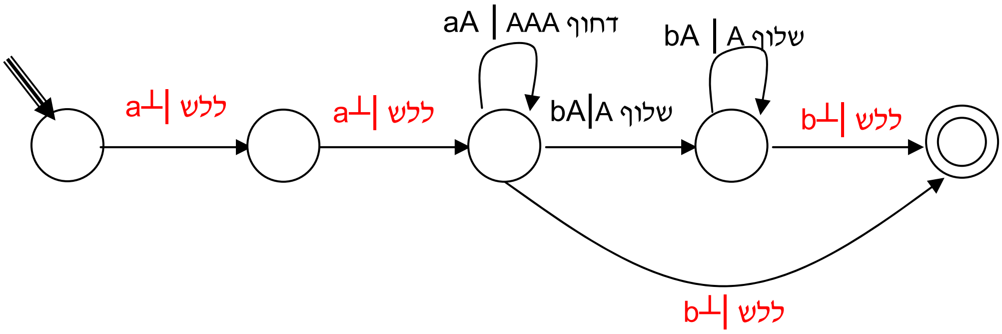
$L=a^{n+1}b^{3n-2}$ $n\geq0$

עבור $n=0$: נקבל b^{-2} אסור.

עבור $n=1$: נקבל aab . (שהיא גם המילה הקצרה ביותר)

ה n הראשון המתקבל הוא "החריג"
"פנים" האוטומט חייב לטפל ביחס החזקות שהוא 1 ל 3 (מורידים את הקבועים +1 ו -2 ומקבלים a^nb^{3n})

מה שמסומן באדום הינו הטיפול ב aab



$L=a^{n+1}b^{3n-1}\ \ n\geq 0$

השלם את האוטמט

נציב את ה n הנמוך ביותר שהוא 1 כי עבור 0 נקבל מספר שלילי.
ונקבל את המילה aabb מכאן נובע המילה הקצרה ביותר aabb
הרעיון :
על 2 ה a הראשונות לא נבצע מאומה
על כל a נוסף נדחוף AAA
על כל b נשלוף A
על 2 ה b האחרונים (כשהמחסנית ריקה לא נבצע מאומה

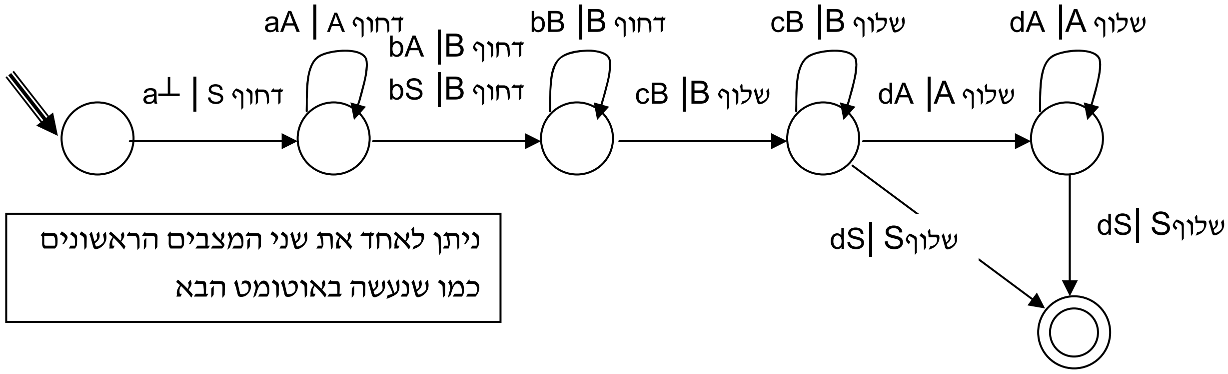
$L=a^{2n+1}b^{3n-1}\ \ n\geq 0$

השלם את האוטמט

נציב את ה n הנמוך ביותר שהוא 1 כי עבור 0 נקבל מספר שלילי.
ונקבל את המילה aaabb מכאן נובע המילה הקצרה ביותר aaabb
הרעיון :
על 3 ה a הראשונות לא נבצע מאומה
על כל 2 a נוספים נדחוף AAA
על כל b נשלוף A
על 2 ה b האחרונים (כשהמחסנית ריקה לא נבצע מאומה

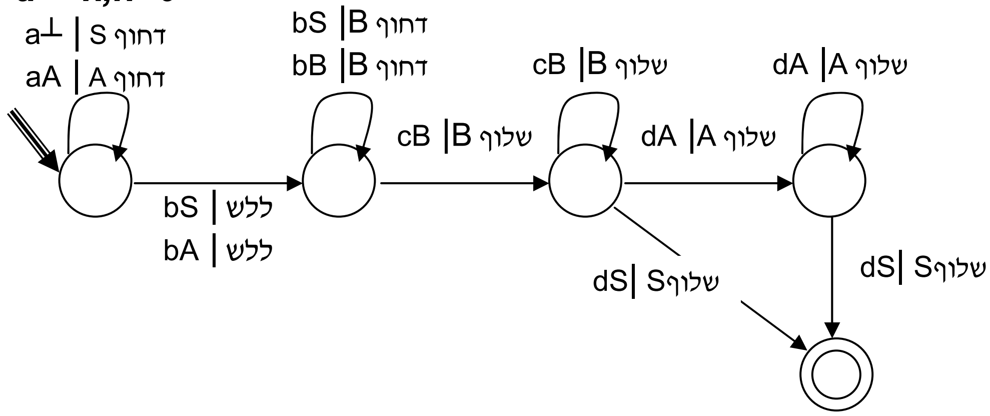
תרגילים בהם נדרש להכניס יותר מאות אחת למחסנית

$L= a^n b^k c^k d^n \quad k,n>0$



כיצד נשנה את הפתרון לו השפה הינה

$L= a^n b^{k+1} c^k d^n \quad k,n>0$



כלומר השינוי הינו שעל ה b הראשון לא נבצע מאומה

בנה אוטומט מחסנית לשפות הבאות

$L= a^n b^{k+1} c^k d^n$

א. כאשר $k,n\geq 0$

ב. כאשר $k>0,n\geq 0$

ג. כאשר $k\geq 0,n>0$

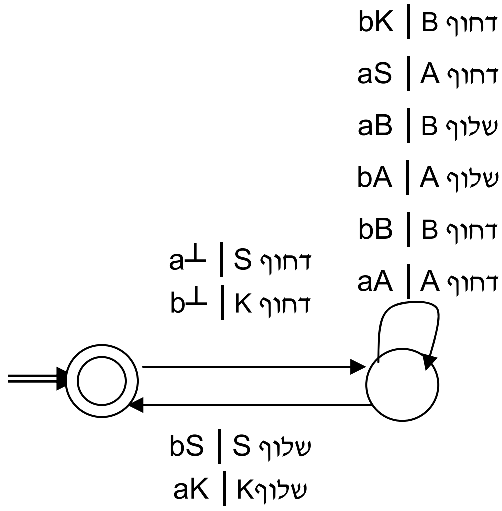
מספר ה a ים שווה למספר ה b ים

בנה אוטומט מחסנית לשפה מעל {a,b} כך שמספר ה a ים שווה למספר ה b ים.(כולל המילה הריקה)

פתרון א

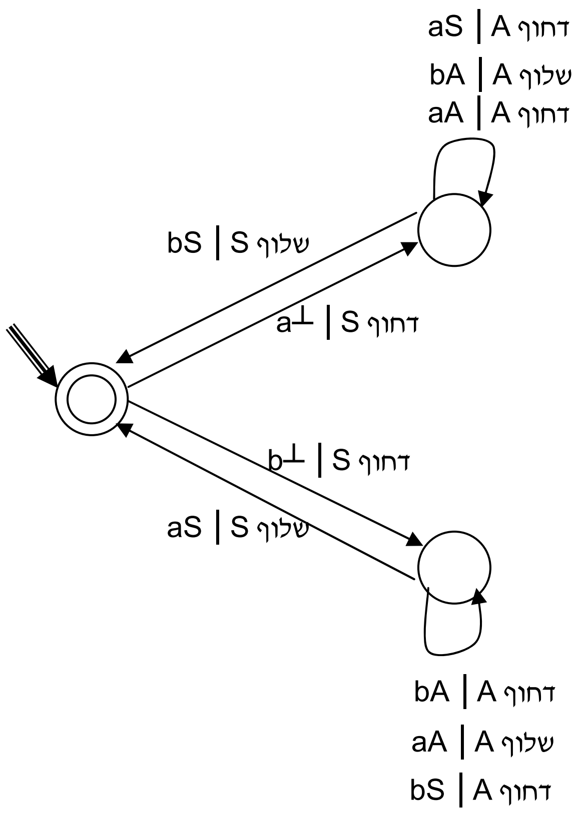
פתרון זה הינו במספר קטן של מצבים אך עם שימוש באותיות שונות בהככנסה

המילה הקצרה ביותר ε
הרעיון : כל עוד מספר ה aים גדול ממספר ה bים נדחוף A ונשלוף B
כל עוד מספר ה bים גדול ממספר ה aים נדחוף B ונשלוף A



פתרון ב

פתרון נוסף תוך שימוש רק ב A בהכנסה למחסנית.



תרגיל

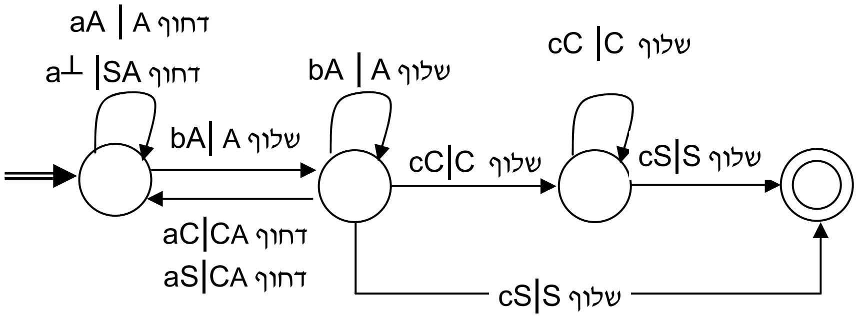
בנה אוטומט מחסנית למילים מעל {a,b} כך שמספר ה a ים גדול ב 1 ממספר ה b ים.

תרגיל

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c}:

L={(a^{n}b^n) (a^{z}b^z)…k time c^k /k>0}

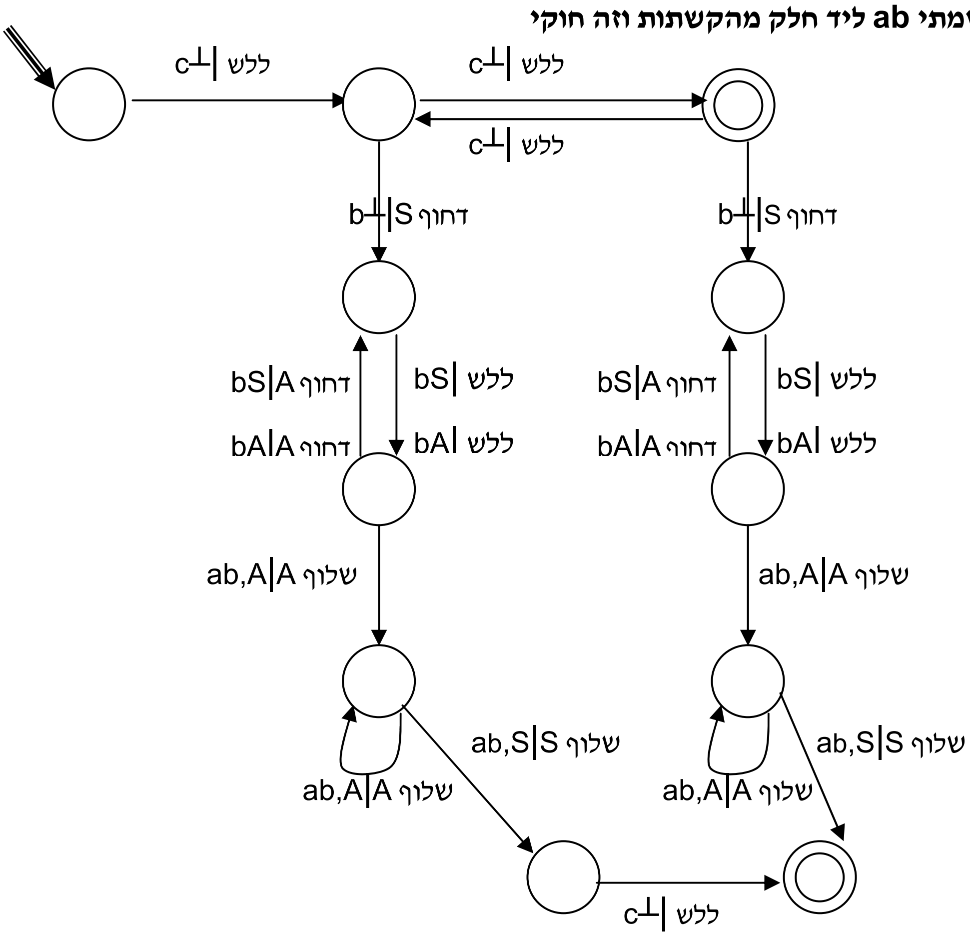
פתרון



תרגילים בהם שילוב של אוטומט רגיל ואוטומט מחסנית

$L=\{c^k\, b^{2n}\, (ab)^n\, c^{k\%2} \;\;|\;\; k>0,\, n>=0\}$

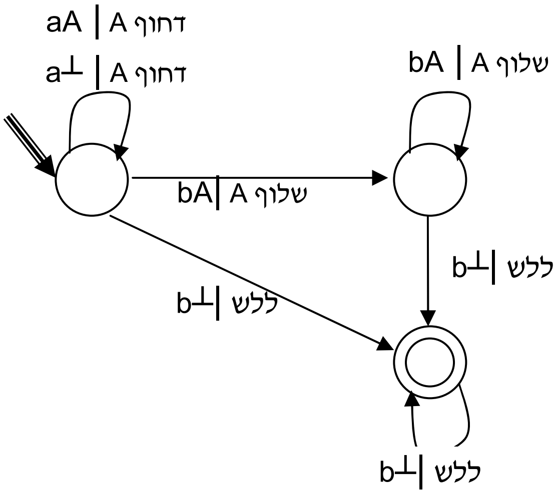
שימו לב שרשמתי ab ליד חלק מהקשתות וזה חוקי



תרגילים שונים

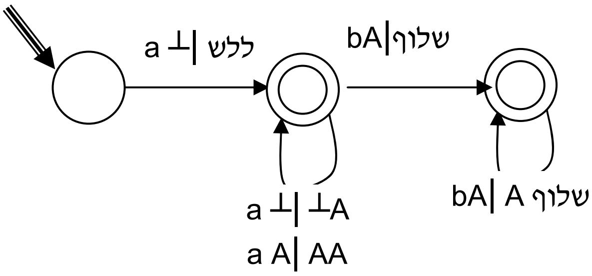
$L= a^n b^k \quad k>n\geq 0$

המילה הקצרה ביותר b
אין צורך ב S
הרעיון : על כל a נדחוף A
על כל b נשלוף A
עבור ה b הראשונה כשה מחסנית ריקה
עוברים למצב מקבל

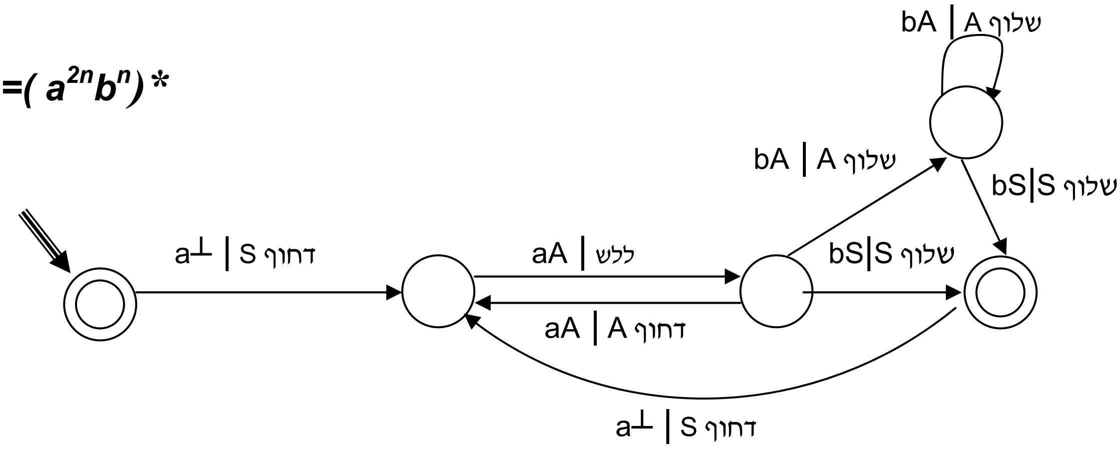


$L= a^n b^k \quad n>k\geq 0$

המילה הקצרה ביותר a
אין צורך ב S
הרעיון : על ה a הראשונה שלל
על כל a נדחוף A
על כל b נשלוף A



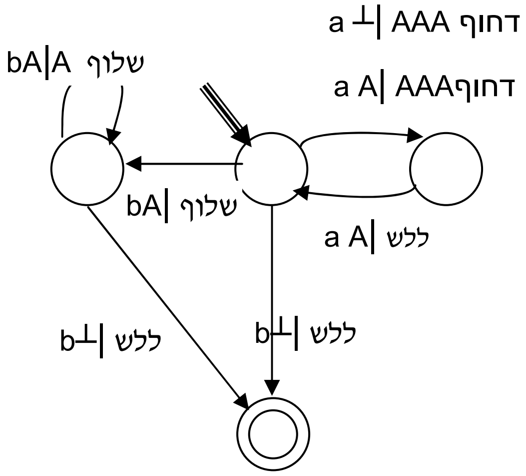
$L=(a^{2n} b^n)^*$



$L = a^{2n}b^{3n+1} \quad n \geq 0$

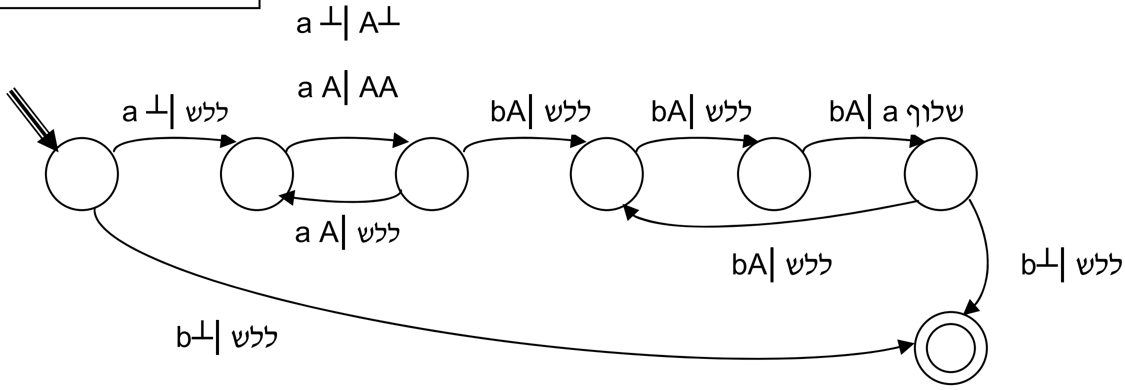
פתרון א

המילה הקצרה ביותר :b
אין צורך ב S
הרעיון : על כל 2 a נדחוף AAA (על הראשון דוחפים ועל השני אין מבצעים דבר).
על כל b נשלוף A

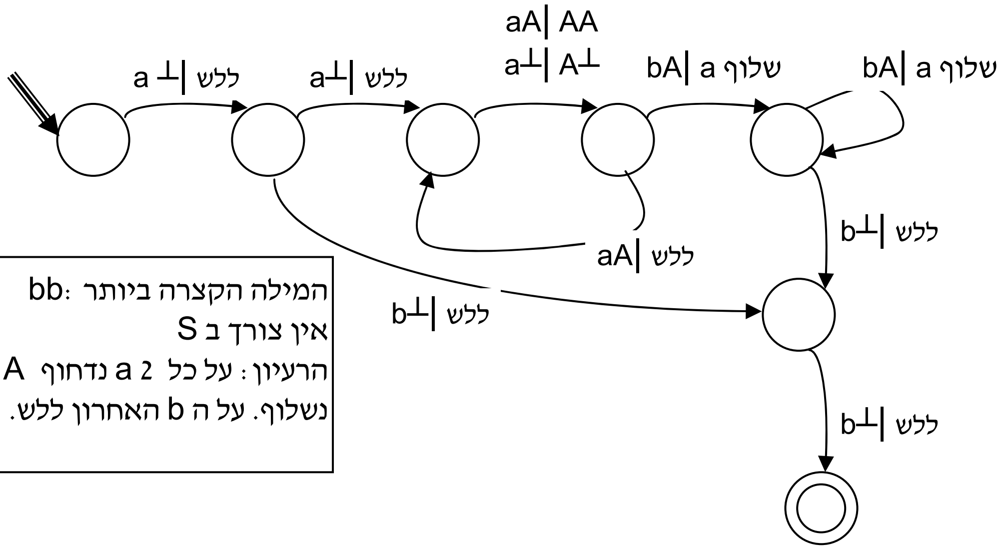


פתרון ב

המילה הקצרה ביותר :b
אין צורך ב S
הרעיון : על כל 2 a נדחוף A (על הראשון דוחפים ועל השני אין מבצעים דבר).
על כל שלושה b נשלוף A



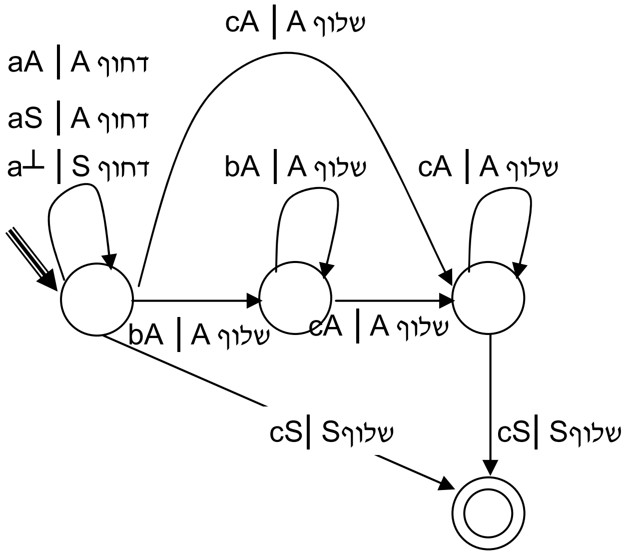
$L= a^{2n+1}b^{n+2} \quad n\geq 0$



המילה הקצרה ביותר: bb
אין צורך ב S
הרעיון: על כל 2 a נדחוף A ועל כל b
נשלוף. על ה b האחרון ללש.

$L=a^{n+k}b^nc^k \quad n\geq 0 \; k > 0$

המילה הקצרה ביותר: ac
הרעיון: על כל a נדחוף A ועל כל b
נשלוף ועל כל c נשלוף.
מקרה קיצון: n שווה לאפס



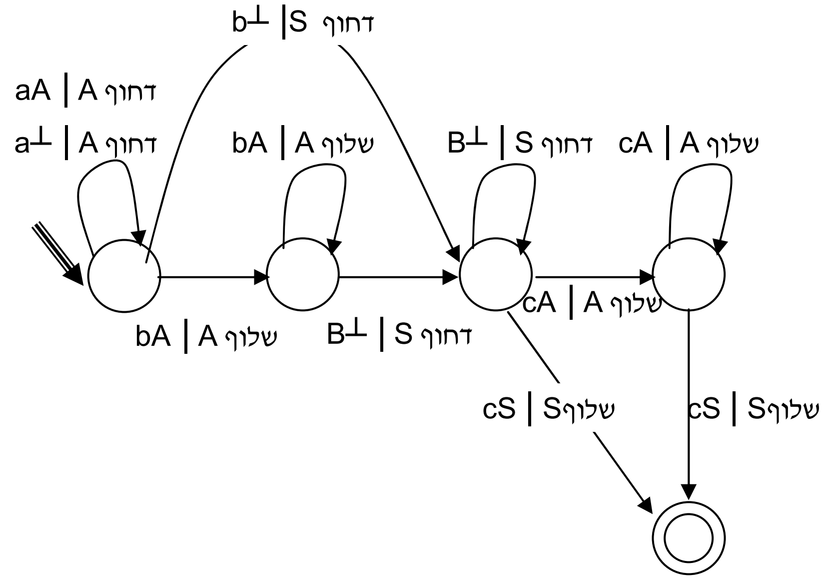
$L=a^nb^{n+k}c^k \quad n\geq 0 \; k > 0$

$a^nb^{n+k}c^k$ ►►► $a^nb^n\ b^kc^k$

הרעיון : על כל a נדחוף, על כל b נשלוף עד שהמחסנית מתרוקנת. כעת על כל b נדחוף ועל כל c נשלוף.

מקרה קיצון : n שווה לאפס כלומר אין a במילה.

המילה הקצרה ביותר: bc
הרעיון : על כל a נדחוף A ועל כל b נשלוף על b כשהמחסנית ריקה נדחוף ועל כל c נשלוף



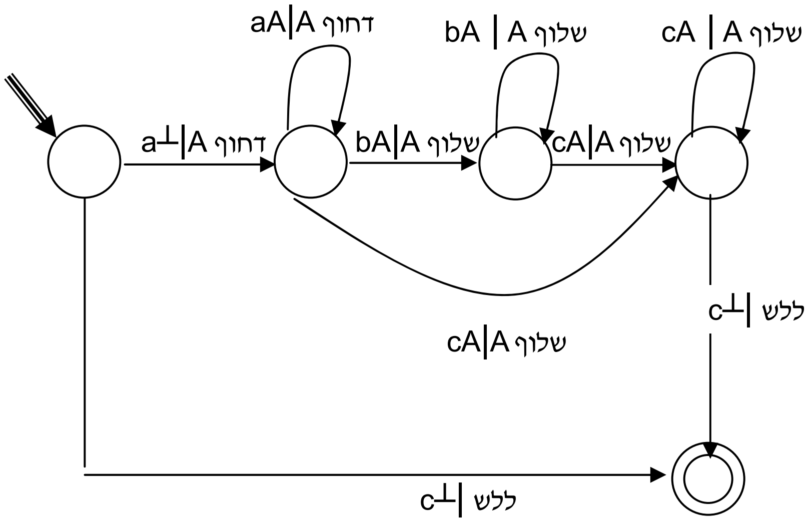
$L=a^{2n-k}b^nc^{n-k+1} \quad n,\kappa\geq 0$

$L=a^{n+n-k}b^nc^{n-k+1}$ ומכאן נובע הרעיון לפיתרון המופיע בהמשך.

$L=a^{n+\underline{n-k}}\ b^nc^{\underline{n-k}+1}$ נציב $n-k=x$ ונקבל $L=a^{n+x}\ b^nc^{x+1}=a^{x+n}\ b^nc^xc$

הרעיון : על כל a נדחוף, על כל b נשלוף, על כל c נשלוף. לבסוף c נוספת.

מקרה קיצון : n שווה לאפס כלומר אין b במילה.



$L= a^{2n+1}b^{n-m}a^{m+1} \quad n>m\geq 0$

א. מהי המילה הקצרה ביותר.

ב. מהי המילה הקצרה ביותר לו התנאי היה n>=m>=0

פתרון

תחילה נפטר מפעולת החיסור כיוון שמופיע n-m נבצע הצבה $k=n-m \Rightarrow k+m=n$

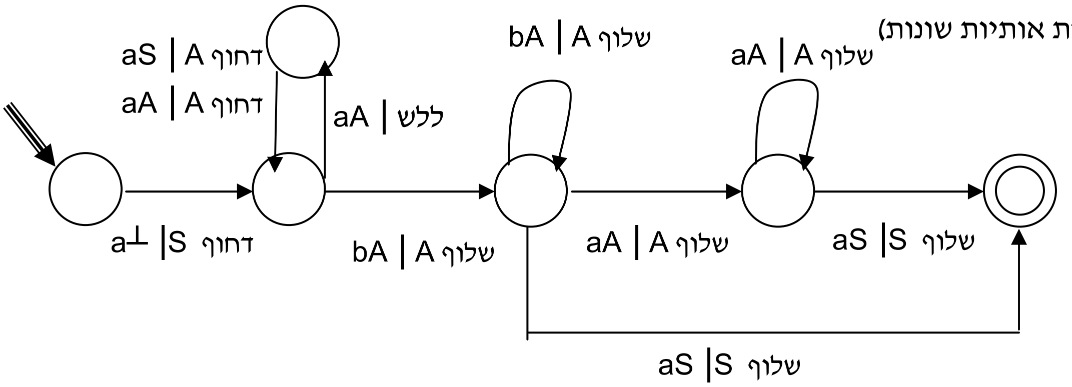
כמו כן m יכול להיות 0 ומהתנאי n>m נובע ש n לפחות 1

נציב ונקבל

$$L=a^{2(k+m)+1}b^{k}a^{m+1} = aa^{2k+2m}b^{k}a^{m+1} = aa^{2m}a^{2k}b^{k}a^{m}a$$

מכאן על ה a הראשון נכניס A בודד . כעת על כל 2 a נכניס A למחסנית על כל b נוציא ועל כל a נוציא.

(אין צורך בהכנסת אותיות שונות)



ב. המילה הקצרה ביותר aaaba

ג. המילה הקצרה ביותר aa

$L= a^{n+1}b^{n-m}a^{2m+1} \quad n>m\geq 0$

א. מהי המילה הקצרה ביותר.

ב. מהי המילה הקצרה ביותר לו התנאי היה n>=m>=0

ג. בנה אוטומט מחסנית.

פתרון

א. המילה הקצרה ביותר aaaba

ב. המילה הקצרה ביותר aa

ג.

תחילה נפטר מפעולת החיסור כיוון שמופיע n-m נבצע הצבה

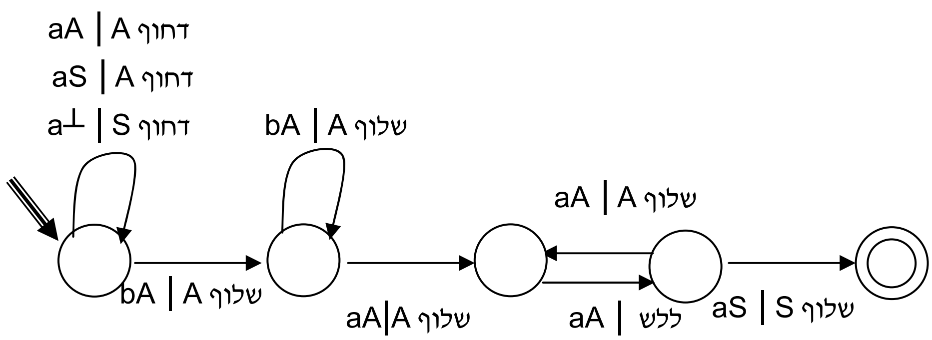
$$k=n-m \quad \Rightarrow \quad k+m=n$$

כמו כן m יכול להיות 0 נובע ש n לפחות 1

נציב ונקבל

$$L=a^{k+m+1}b^{k}a^{2m+1} \quad = aa^{k+m}b^{k}a^{2m+1} \quad = aa^{m}a^{k}b^{k}a^{2m+1}$$

m>=0 , k>0



א. המילה הקצרה ביותר aaaba

ב. המילה הקצרה ביותר aa

$L= a^{2n+1}b^{n-m}a^{m-1} \quad n>m\geq 0$

תחילה נפטר מפעולת החיסור כיוון שמופיע n-m נבצע הצבה

$k=n-m \Rightarrow k+m=n$

כמו כן m חייב להיות לפחות 1 נובע שגם n לפחות 2

נציב ונקבל

$L=a^{2(k+m)+1}b^{k}a^{m-1} \quad = aa^{2k+2m}b^{k}a^{m-1} \quad = aa^{2m}a^{2k}b^{k}a^{m-1} \; k>0 \; m\geq 0$

המילה הקצרה ביותר עבור m=1 n=2 הינה aaaaab

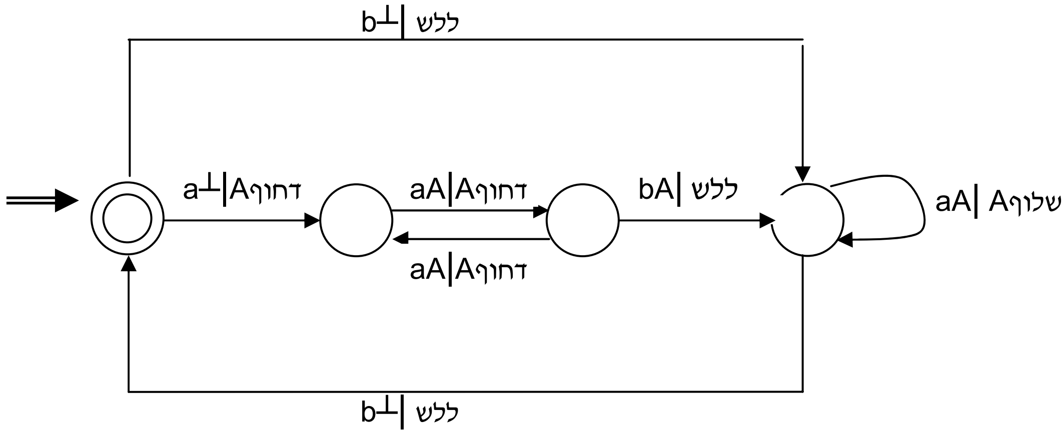
השלם את האוטומט

מקבלת את המילים מעל {a,b} זוגי n $\quad L1=a^nba^nb \quad L=(L1)^K \quad n,k\geq 0$

נתונה השפה L מעל הא״ב {a,b} $\quad$ n זוגי , $n,k \geq 0$

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L1 .

פתרון

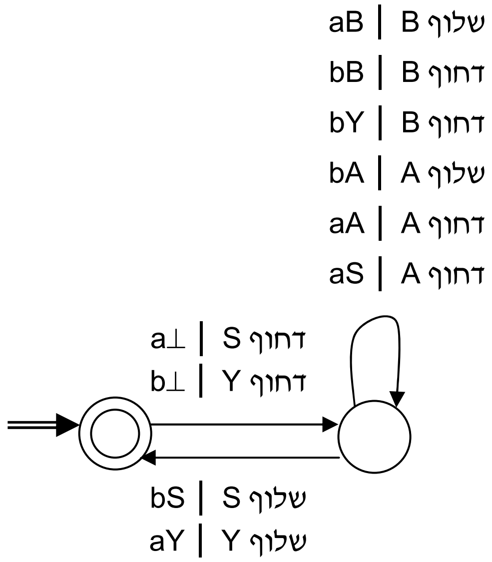


תרגיל

בנה אוטומט מחסנית לשפה ***L***

$L1=ba^nba^n \qquad L=(L1)^K \quad n,k\geq 0$ n זוגי

בנה אוטומט מחסנית לשפה הבאה מעל {a,b} שבו מספר ה a שווה למספר ה b



תרגיל

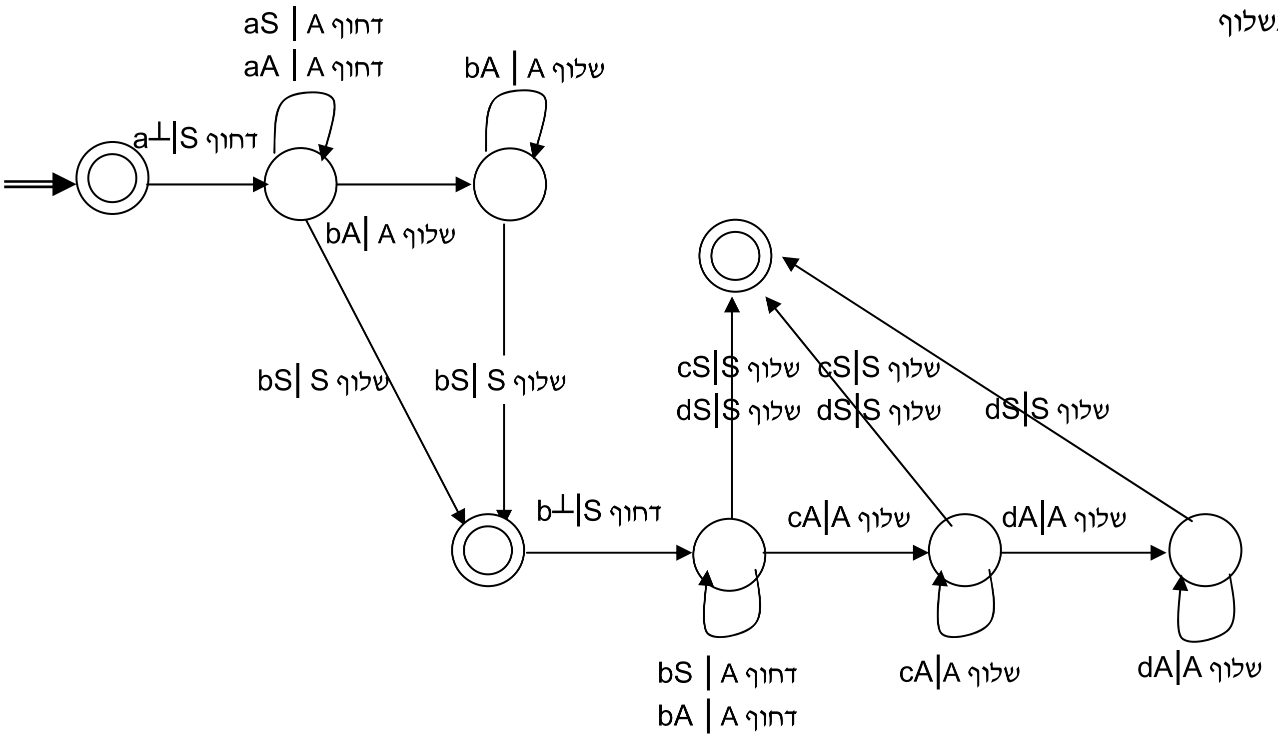
בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה הבאה מעל הא״ב {a,b,c,d} :

$$L=\{a^n b^{n+m+k} c^m d^k \mid n,m,k \geq 0\ \}$$

$$a^n b^{n+m+k} c^m d^k == a^n b^n\ b^{m+k} c^m d^k$$

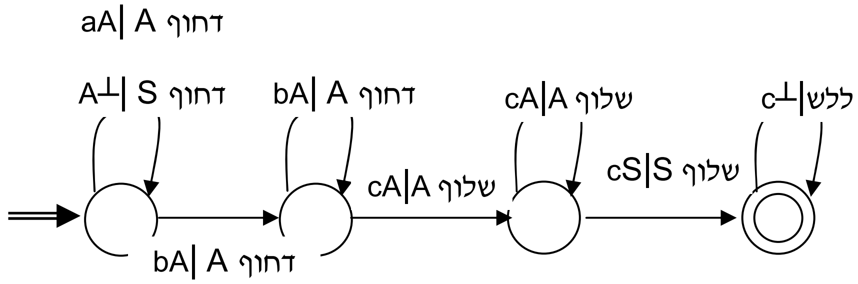
פתרון

על כל a נדחוף, על כל b נשלוף, כאשר המחסנית מתרוקנת אזי על כל b נדחוף נדחוף על כל c נשלוף ועל כל d נשלוף



$L=\{a^n b^m c^k \ / n,m,k>0, k\geq n+m\}$

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה מעל הא״ב {a,b,c}הרשומה לעיל.

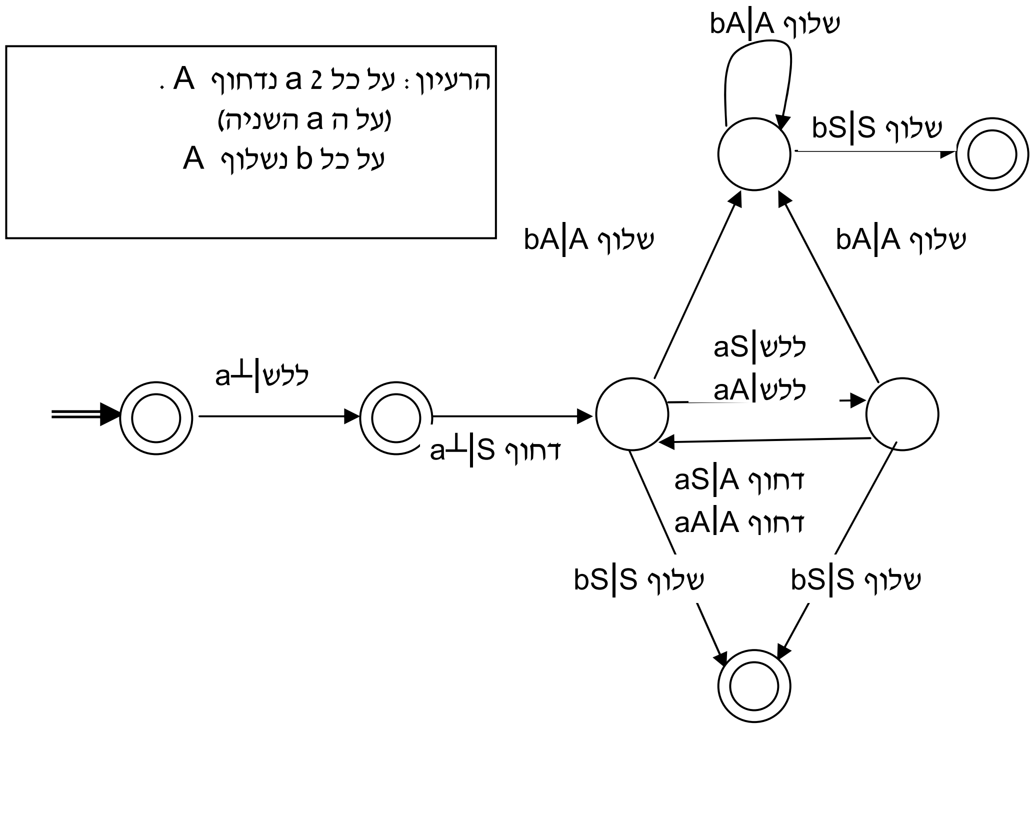


$L=\{a^n b^k \ / n, k\geq 0, k=n/2\}$

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה L מעל הא״ב {a,b}.

הערה : 5/2 שווה 2 . 6/2 שווה 3.

פתרון



תרגיל

בבית חרושת מייצרים מחרוזות המורכבות מפנינים גדולות וקטנות, ובכל מחרוזת מספר הפנינים הקטנות שווה למספר הפנינים הגדולות. המחרוזת צריכה להתחיל ברצף של פנינים קטנות ולהסתיים ברצף של פנינים קטנות ובמרכזה רצף של פנינים גדולות. מחרוזת שאינה עומדת בתנאים אלו אינה עוברת את בדיקת האיכות.

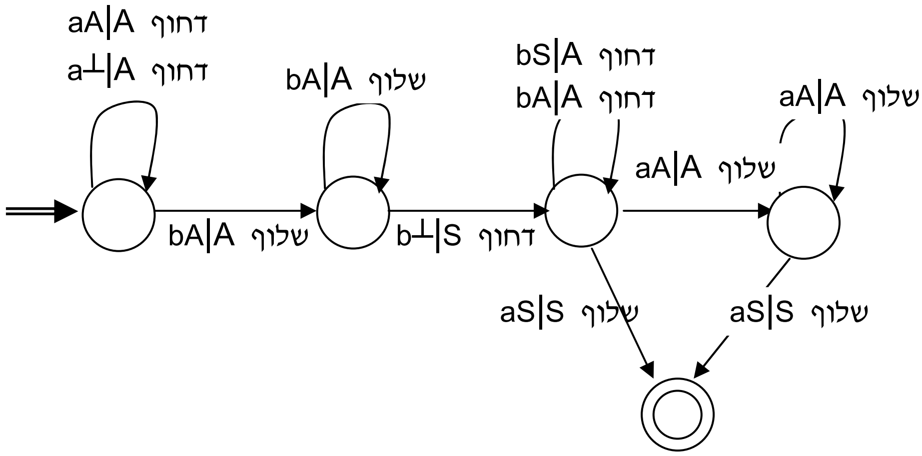
א. הגדר שפה שמתאימה לכל המחרוזות העומדות בבדיקת האיכות.

ב. בנה אוטומט מחסנית הקובע אם מחרוזת נתונה עוברת את בדיקת האיכות.

פתרון

א. השפה היא $\{a^nb^{n+m}a^m \mid n, m>0\}$ מעל הא"ב $\{a,b\}$.

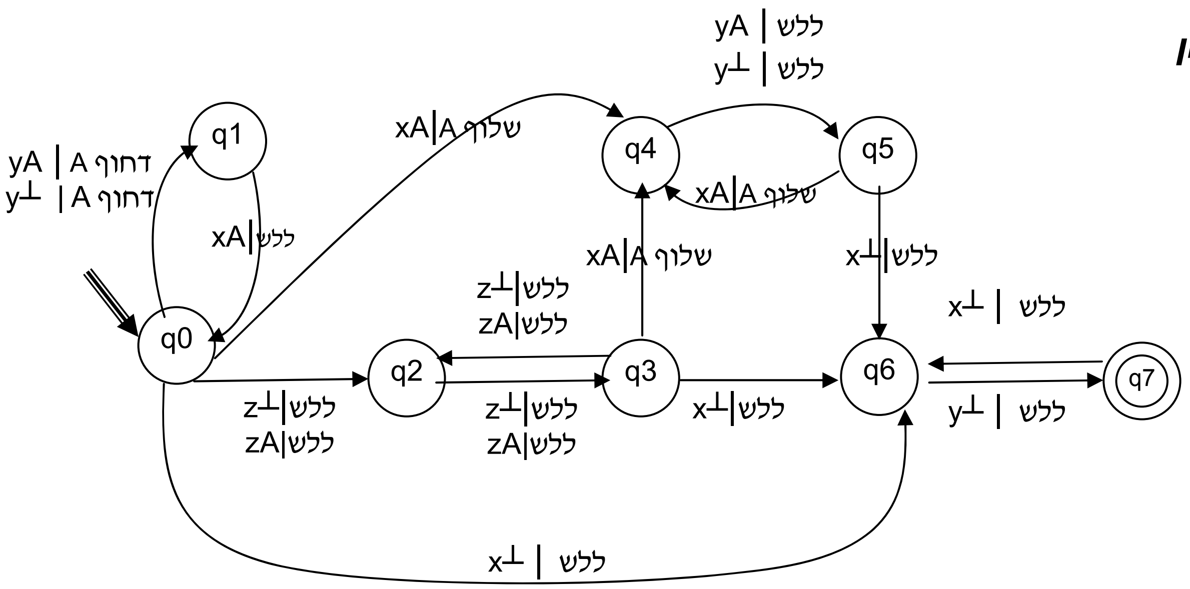
ב.



תרגיל (דורון זוהר) $L=\{ (yx)^nz^k(xy)^j / n,k\geq0\ n<j\ \ k\ even \}$

בנה אוטומט מחסנית עבור השפה הבאה מעל הא"ב $\{x,y,z\}$:

פתרון



אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי

המודל של אוטומט מחסנית הינו לא דטרמיניסטי. למעשה אוטומט מחסנית דטרמיניסטי הינו מקרה פרטי של אוטומט מחסנית.

כוחו של אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי גדול יותר מכוחו של אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.

בנה אוטומט המקבל את השפה הבאה :

$L=\{a^n b^k c^m$ n=k או k=m n,k,m>0}

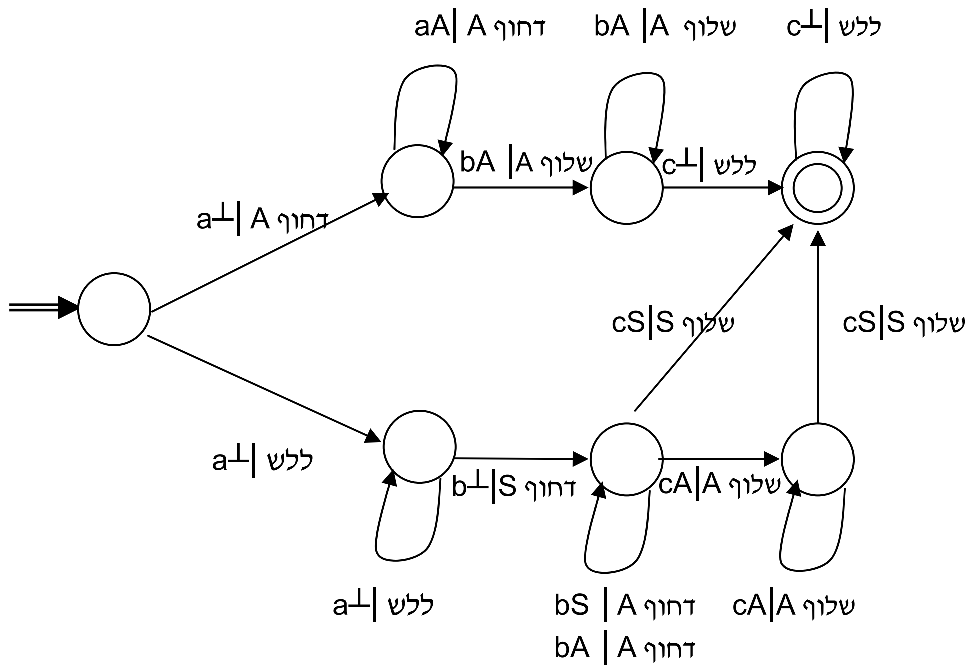
הרעיון : נחלק לשני מקרים

מקרה אחד כאשר מספר ה aים שווה למספר ה bים שאז על כל a נדחוף A למחסנית ועל כל b נשלוף.

עבור ה cים לא נבצע מאומה.

מקרה שני כאשר מספר ה bים שווה למספר ה cים שאז על כל a לא נבצע דבר על כל b נדחוף A למחסנית ועל כל c נשלוף.

האי דטרמיניזם מתבטא (בתו הראשון) שכאשר יש לנו a והמחסנית ריקה ניתן לבחור בשתי אשפרויות : דחוף A או לל״ש.



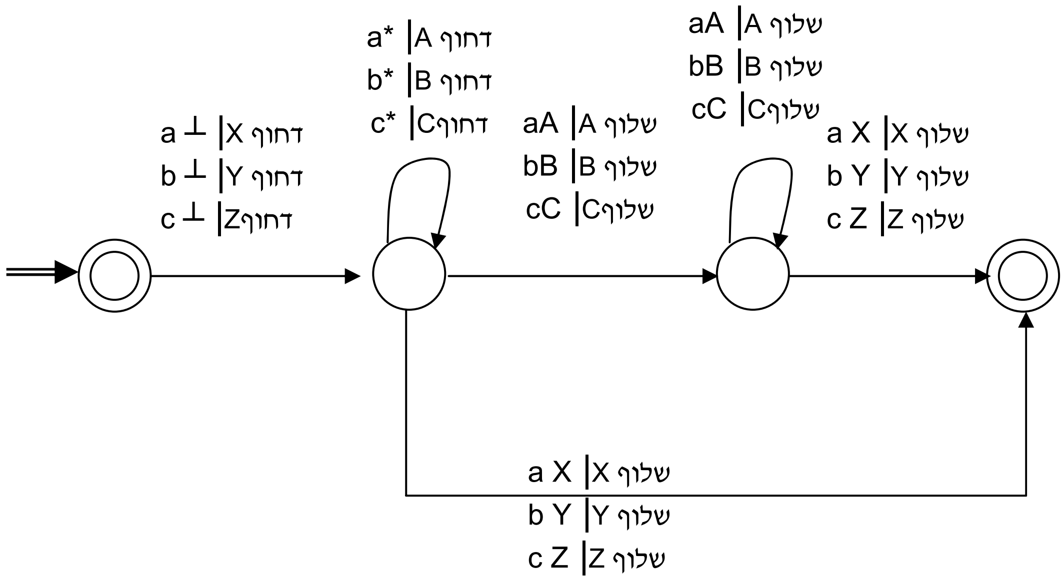
בנה אוטומט המקבל את השפה הבאה :

מילה מעל {a,b,c}שאורכה זוגי והינה פלינדרום כולל המילה הריקה.

הפתרון

* פירושו לא משנה מה יש בראש המחסנית. הפתרון אינו דטרמיניסטי.

הרעיון : על כל אות דוחפים למחסנית את האות הגדולה המתאימה לה ללא תלות במה שיש ברשא המחסנית.
מרגע מסוים מתחילים להוציא אך פה אם יש בקלט a אזי חייב להיות A בראש המחסנית שפירושו שהיה a בהתאמה (בחלק השמאלי של המילה).



בנה אוטומט המקבל את השפה הבאה :

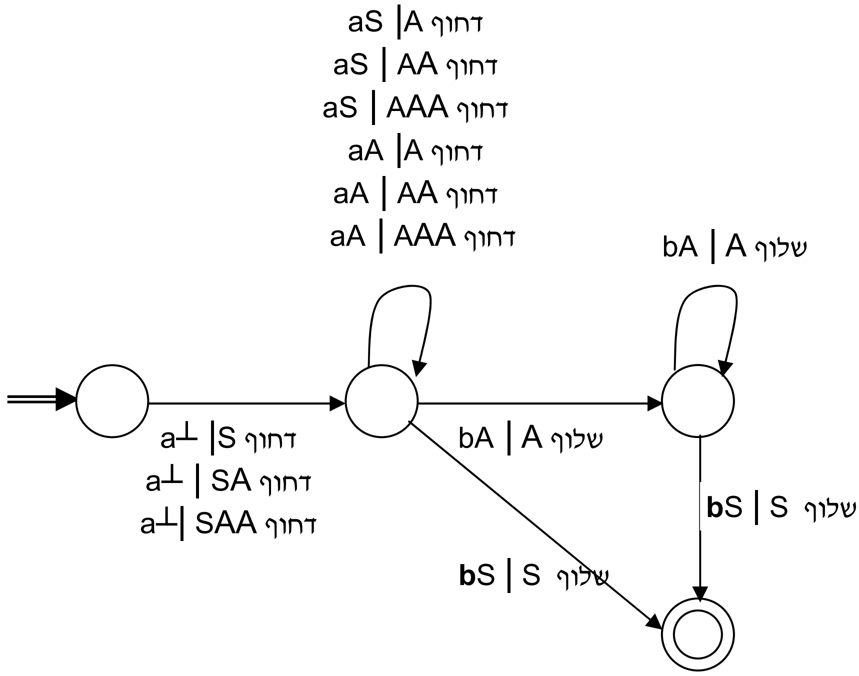
מילה מעל {a,b,c} שהינה פלינדרום כולל המילה הריקה.

בנה אוטומט המקבל את השפה הבאה :

$$L=\{a^n b^k \quad 3n \geq k \geq n \quad n,k>0\}$$

פתרון

הרעיון : על כל a נדחוף A או AA או AAA על כל b נשליך A.



תרגילים באוטומט מחסנית

תרגיל

לבדוק את הפתרון $L = a^{n+2} b^{m-n+3} c^{m-3} \quad n,m \ge 0$

כיוון שהמשתנה n במינוס תחילה עלינו להיפטר מהמינוס. נבצע הצבה

$k=m-n \Rightarrow k+n=m$

נציב ונקבל

$L= a^{2n+2} b^{k+3} c^{k+n-3} \quad k,n\ge 0$

כעת נפרק חזקות בדומה לבעיות שעשינו.

$L=a^{2n+2}b^{k+3}c^{k}c^{n-3} \quad k,n\ge 0$

מסמנים קשרים

$$\boxed{L=a^{2n+2}b^{k+3}c^{k}c^{n-3}}$$

אחד בתוך השני-בניה מבחוץ פנימה.

תחילה הקשר החיצוני. אסור n=0,1,2

n=3 מציבים את הערך הנמוך ביותר המותר ונקבל aaaaaa

n=4 נקבל aaaaaaaac

כלומר על כל 2a נוספת c

הקשר הפנימי

k=0 מציבים את הערך הנמוך ביותר המותר ונקבל bbb

k=1 נקבל bbbbc

כלומר על כל b נוספת c

מספר כללים לאוטומט מחסנית -חזקות

לפי חוקי החזקות מתקיים ולכן הרעיון הכללי הוא להגיע $\mathbf{a^{m+n} == a^m\ a^n \quad == a^n\ a^m}$

למצב שיש לנו חזקות שוות או כפולות של חזקות $\mathbf{a^{m*n} == (a^m)^n == (a^n)^m}$

חזקת אפס נותנת את מילה הריקה $\mathbf{a^0} ==\varepsilon$

דוגמאות

- $\mathbf{a^n b^{2n+1}} = a^n b^{2n+1} = a^n b^{2n} b = (a)^n (b)^{2n} b$

על כל a נכניס למחסנית A ועל כל שני b נוציא (על ה b השנייה) כשהמחסנית ריקה צריך b

או

על כל a נכניס למחסנית AA ועל כל b נוציא כשהמחסנית ריקה צריך b

אם הפירוק הינו $(a)^n\ b\ (b)^{2n}$ אזי

על כל a נכניס למחסנית A על ה b הראשונה לא נעשה כלום (לל״ש) ועל כל שני b נוציא (על ה b השנייה)

או

על כל a נכניס למחסנית AA על ה b הראשונה לא נעשה כלום (לל״ש) ועל כל b נוציא כשהמחסנית ריקה צריך b

- $\mathbf{a^n b^{n-1}} = aa^{n-1}b^{n-1} = a(a)^{n-1}(b)^{n-1}$

הערה: נובע n>0 גם אם נאמר n>=0.

על כל a נכניס למחסנית ועל כל b נוציא (הסוגריים הינם להדגשה בלבד)

- $\mathbf{a^n b^k c^m} \quad k=n+m$

$= a^n b^{n+m} c^m = a^n b^n b^m c^m$

על כל a נכניס למחסנית ועל כל b נוציא כאשר המחסנית ריקה והאות בקלט b נתחיל שוב להכניס למחסנית ובהמשך על כל c להוציא.

- $\mathbf{a^n b^{n-m} c^m}$

נציב k=n-m= נובע גם ש n=m+k נציב במקור ונקבל

$= a^{m+k} b^k c^m = a^m a^k b^k c^m$

על כל a נכניס למחסנית ועל כל b נוציא ועל כל c נוציא.

תרגילים

1. $L=a^n\ b^k \quad n>k \quad k\geq 0$

2. $L=a^n\ b^k \quad n\neq k \quad n,k\geq 0$

3. $L=a^n b^{2w} \quad 2w>n$

4. $L=a^n b^w$

שארית חלוקת n ב 2 > w

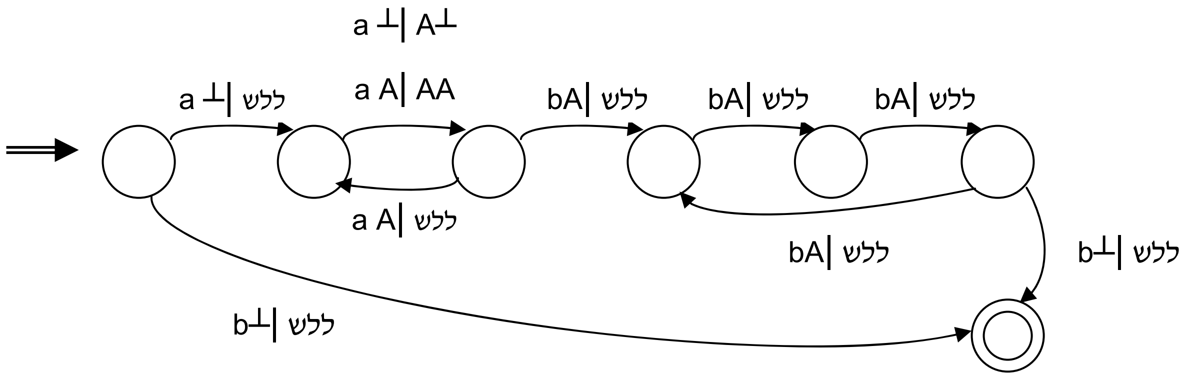
5. $L=a^n \qquad n \% 3 = 1$

6. $L=a^n b^w \quad n \% 3 = 1 \quad , \quad w \% 2 = 0$
(שקול ל $L=a^{3n+1}b^{2w} \quad n , w \geq 0$)

7. $L=a^n b^w \qquad w = n \% 3$

8. $L=a^n b^w \qquad w \% 3 = n\% 3$

9. $L=a^{2n}b^{3n+1} \quad n\geq 0$



10. $L=a^{5n-1}b^{3n+2} \quad n>0$

11. $L= (a^n b^k c^m a^{k+n+1} \quad | \quad n,k,m \geq 1)$

12. $L= a^n b^m c^{2(m-n)} \quad | \ m\geq n \quad n>0$

13. $L= \ a^{3n-1}b^{2m}c^{m+2}d^{n+1} \quad n>0 \ m\geq 0$

14. $L=a^n b^m a^k b^l \quad n,m,k,l\geq 0 \quad n+k=m+l$

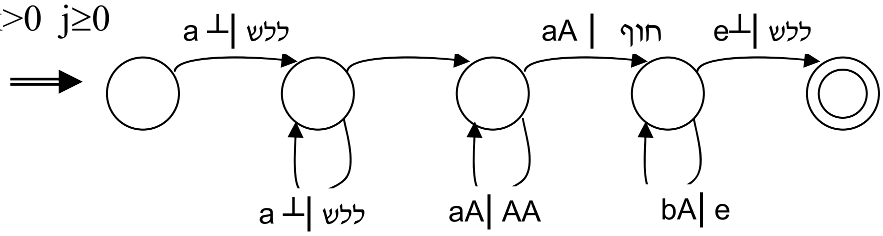
ניתן לפרק את הביטוי ל

$a^r\ a^s b^s\ b^t a^t\ a^w b^w\ b^r$

15. $L=a^nb^mc^k$ $n,m,k>0$, $n+m$ אי זוגי , $n+m>k$

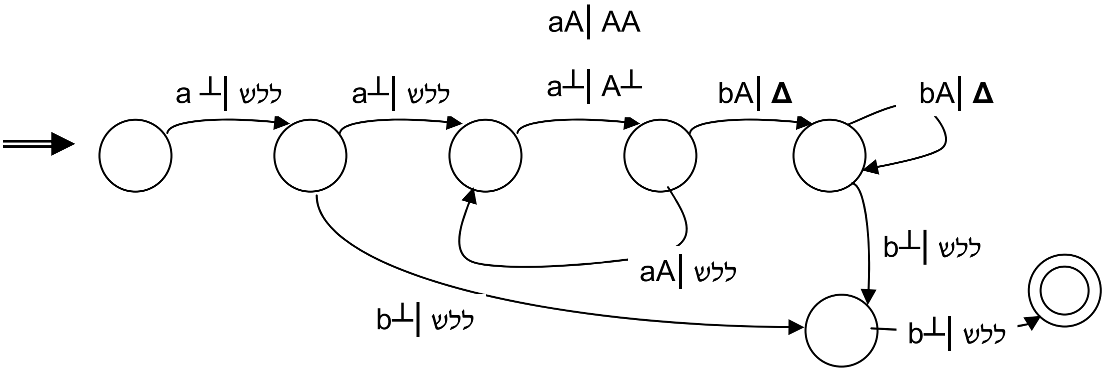
16. a^ib^j $i>j\geq 0$

$== a^k a^j b^j$ $k>0$ $j\geq 0$



תרגילים

1. $a^{3n+8}b^{n+2}$ $n\geq 0$
2. $a^{2n+3}b^{n+1}$ $n\geq 0$
3. $a^{n-1}b^{2n-1}$ $n\geq 0$
4. $a^{3n-2}b^{n+1}$ $n>0$
5. $a^{2n-1}b^{3m+1}c^{m+3}d^{n+1}$ $n\geq 0$
6. a^ib^j $i\neq j$ $j\geq 0$
7. a^nb^{2n+1} $n\geq 0$
8. $a^{3n+8}b^{n+2}$ $n\geq 0$
9. $a^{2n+3}b^{n+1}$ $n\geq 0$
10. $a^{n-1}b^{2n-1}$ $n\geq 0$
11. $a^{3n-2}b^{n+1}$ $n>0$
12. $a^{2n-1}b^{3m+1}c^{m+3}d^{n+1}$ $n\geq 0$
13. $a^{2n+1}b^{n+2}$ $n\geq 0$



תרגילים מעורבים-אוטומט סופי ובאוטומט מחסנית

1. בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה הבאה

$a^m b^k c^j$ m>=0 k>=2 m+k<j j mod 2 = 0

2. נתונה השפה הבאה : $\{ a^n c^k b^{2n+k} \mid n>0, k>=0, (2n+k)$ זוגי $\}$

בנה אוטומט מחסנית לשפה .

3. שרטט אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את שפת כל המילים מעל האב' { 0,1,2 } המתחילות ב - 0 ומסתימות ב - 2 ולא מכילות את הרצף 02, וכן לא מתקיים שיש במילה שתי אותיות זהות רצופות.

4. בנה אוטומט מחסנית לכל אחת מהשפות הבאות

נתונה השפה הבאה : $\{a^{1+2n} b^k c^{n+k} \mid n, k>=0\}$

נתונה השפה הבאה : $\{ a^n c^k b^{2n+k} \mid n>0, k>=0, (2n+k)$ זוגי $\}$

5. לפניך השפה הבאה : $l=\{a^i b^j c^k \mid i>=0, j>0, j \bmod 2=0, k= 1+ i \bmod 2\}$

א. מהם הערכים האפשריים של הביטוי i % 2 ? ____________________

ב. מהם הערכים האפשריים של k? ______________________

ג. מהי המילה הקצרה ביותר בשפה? ___________________

ד. תן 2 דוגמאות שונות למילים בשפה : _________________ ______________________

ו-2 דוגמאות למילים שאינן בשפה : _________________ ______________________

ה. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל $\{a,b,c\}=\sum$ המקבל את השפה הנ"ל.

5. קוד סודי של כרטיס אשראי בנוי מ- 4 תווים באופן הבא :

התו הראשון הוא אחת מהאותיות a,b,c.

שני התווים הבאים הם שתיים מהספרות 0-9.

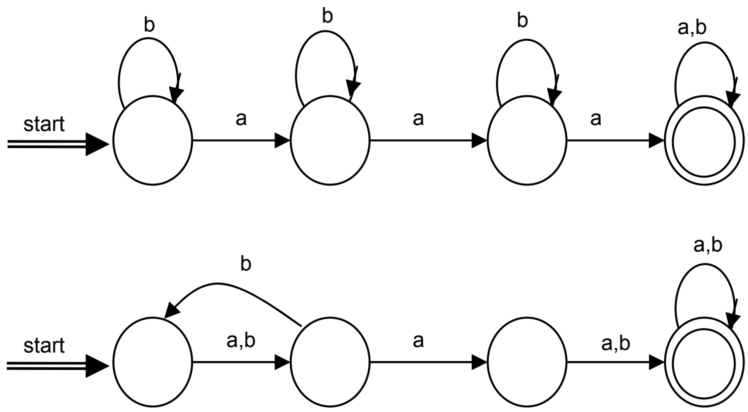
התו האחרון הוא אחת מהאותיות a,b,c, אך <u>שונה</u> מהתו הראשון.

א. מה הא"ב של השפה? ___________________________________

ב. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את כל המילים המהוות קוד כרטיס אשראי.

תרגיל

נתונים שני האוטומטים (סופיים דטרמיניסטים) הבאים מעל { a,b }



א. בדוק עבור שני האוטומטים האם המילים הבאות מתקבלות :

(1) abaaa (2) abbaba (3) aaaaba

ב. הסבר במילים מהי השפה המתקבלת עבור האוטומט <u>הראשון</u> .

ג. עבור שתי הטענות הבאות, אם הטענה נכונה - הסבר מדוע,
ואם אינה נכונה - הבא דוגמא נגדית (דוגמא שסותרת את הטענה).

(1) כל מילה המתקבלת באוטומט השני מתקבלת גם באוטומט הראשון.

(2) כל מילה המתקבלת באוטומט הראשון מתקבלת גם באוטומט השני.

תרגיל

במשחק "בן - בת" שני כללים :

הילדים יושבים בשורה כך שאין אף בן שמשני צדדיו יושבות בנות (בת מכל צד) וכן אין בת בין שני בנים.

כל רצף ילדים חייב להתחיל בבת ולהסתיים בבן.

1. מהו א"ב השפה ?
2. תן דוגמא לרצף שעומד בכללי המשחק ולרצף שאיננו עומד בכללים.
3. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את הרצפים העומדים בכללי המשחק.

תרגיל

נתונה השפה הבאה מעל א"ב { a,b } :

$$l = \{ a^{2n} \ b^{n+m} \ c^{2w} \mid n,m >= 0 \quad m<2w \}$$

תרגיל

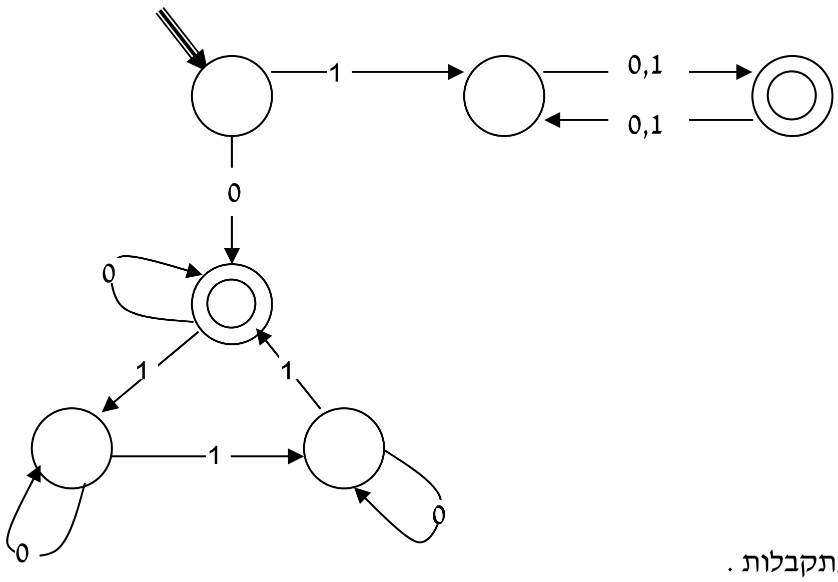
נתונה השפה הבאה : $L = \{ 0^i 1^j 2^{i+j+k} 3^k \mid i,j,k >= 0 \}$

א. עבור כל מילה בדוק האם היא שייכת לשפה, אם לא הסבר בקצרה מדוע לא.

המילה	שייכת לשפה	לא שייכת לשפה, הסבר מדוע לא
1. 0123		
2. 0011222223		
3. 2233		
4. 1133		

תרגיל

נתון האוטומט הבא מעל הא"ב {0,1} :



א. הגדר אילו מילים מתקבלות .

ב. בנה את האוטומט המתאים לשפה ההפוכה.

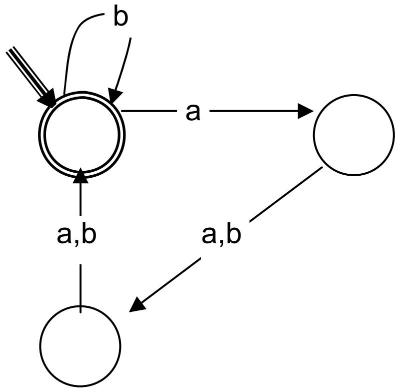
פתרון

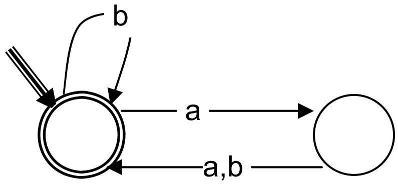
א. המילים המתקבלות הם המתחילות ב 1 ואורכן זוגי או מתחילות ב 0 ומספר ה 1 מתחלק ב 3 ללא שארית.

ב. לא פתור

תרגיל

נתונים האוטומטים הבאים מעל הא"ב {a,b} :





לכל אוטומט רשום

א. הגדר אילו מילים מתקבלות .

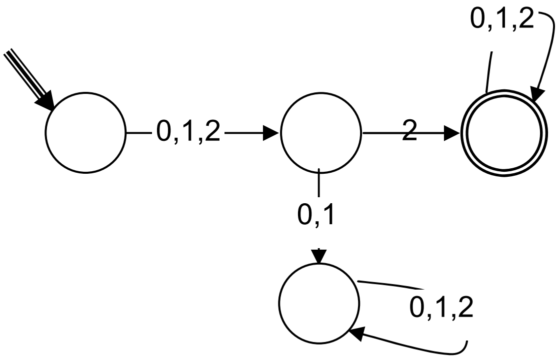
ב. בנה את האוטומט המתאים לשפה ההפוכה.

תרגיל

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל {0,1,2} המקבל מילה המסתיימת ב 11 או $|w| \bmod 3 = 1$

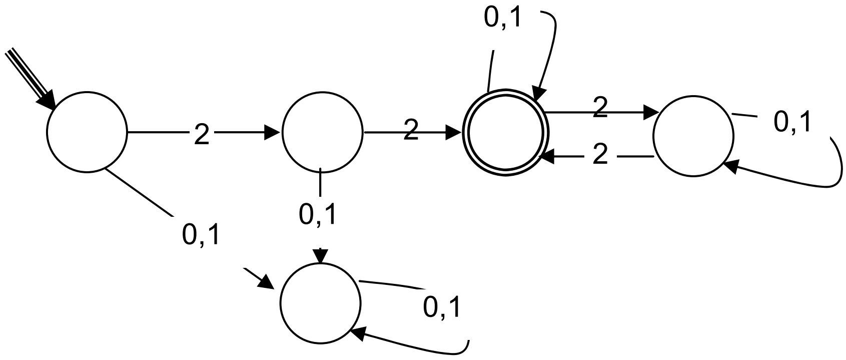
תרגיל

מהי השפה המתקבלת על ידי האוטומט הבא :



תרגיל

מהי השפה המתקבלת על ידי האוטומט הבא :



תרגיל

בנה אוטומט מחסנית ל לשפה הבאה

$$c^n a^m b c^{n-m} \quad m \geq n \quad n>0$$

פתרון

נרשום $k=n-m$

מכאן נובע $n=k+m$

נציב ונקבל

$== c^{k+m}a^m b c^k$

$== c^k\, c^m a^m b c^k$

תרגיל

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי אשר מקבל את השפה הבאה מעל הא״ב{a,b}

אוסף המילים המתחילות ברצף aba ומסתיימות ברצף ba.

האם שפה מעל הא״ב {a,b,c} המכילה את המילים המתחילות ב c

מספר ה a מתחלק ב 3 ללא שארית ומסתיימות ברצף aabb רגולרית.

הסבר תשובתך במספר משפטים.

תרגיל

בנה אוטומט מחסנית המקבל את השפה $\{ (ab)^n (ba)^n \mid n>=0 \}$

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי לשפה הבאה: $L=\{a^n b^m \mid (n+m) \bmod 2=0 ,n,m>0\}$

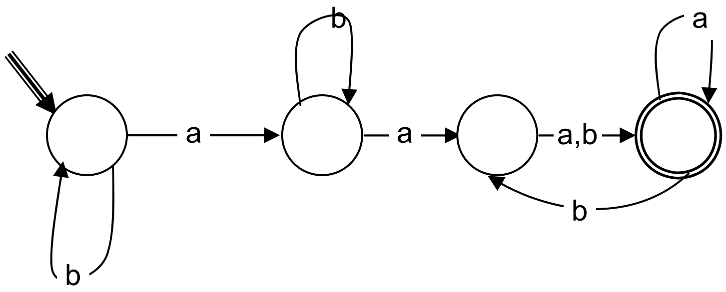
תרגיל

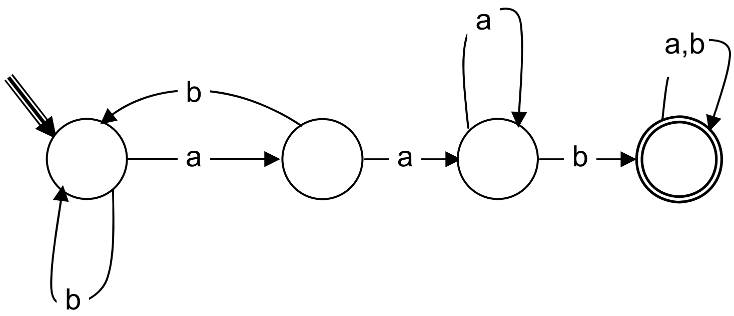
בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי, המקבל את כל המילים מעל הא״ב {a,b} , המכילות

לפחות 2 אותיות a ומספר אותיות ה – b בהן מתחלק ב – 2.

תרגיל

נתונים שני האוטומטים הבאים (סופיים ודטרמיניסטיים) מעל {a,b} :





א. בדוק עבור שני האוטומטים האם המילים הבאות מתקבלות :

1. abaaa 2. abbaba 3. aaaaba

ב. הסבר במילים מהי השפה המתקבלת עבור האוטומט הראשון .

ג. עבור שתי הטענות הבאות, אם הטענה נכונה הסבר, אחרת תן דוגמה נגדית .

I. כל מילה המתקבלת באוטומט העליון מתקבלת גם באוטומט התחתון .

II. כל מילה המתקבלת באוטומט תחתון מתקבלת גם באוטומט העליון.

תרגיל

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את כל המילים מעל { a,b } המכילות לפחות 2 אותיות a ומספר אותיות ה b בהן מתחלק ב 3.

תרגיל

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה הבאה

$$a^n b^m \quad m > 2n \quad n,m \geq 0$$

תרגיל

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה הבאה

$$a^n b^m c^{2(m-n)} \quad m > n \geq 0$$

תרגיל

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה הבאה :

$$a^n b^m c^{2(m-n)} \qquad m > n$$

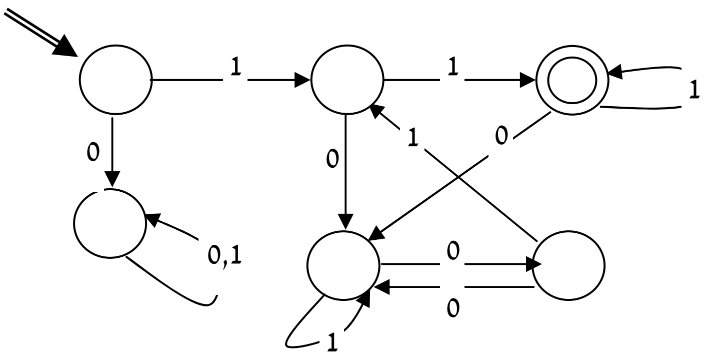
תרגיל

שרטט אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את שפת כל המילים מעל האב׳ { 0,1,2 } המתחילות ב - 0 ומסתימות ב - 2 ולא מכילות את הרצף 02, וכן לא מתקיים שיש במילה שתי אותיות זהות רצופות.

תרגיל

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי אשר מקבל את השפה הבאה מעל הא״ב{0,1}

אוסף המילים המתחילות ב 1 , מכילות מספר זוגי של אפסים ומסתיימות ב 11. (11 מתקבל)



סגירות שפות חופשיות הקשר

- ❖ כל שפה רגולרית הינה גם חופשית הקשר אך לא להיפך.
- ❖ לשפה שניתן לבנות לה אס״ד קוראים שפה רגולרית.
- ❖ שפה שניתן לבנות לה אוטומט מחסנית הינה חופשית הקשר.
- ❖ לכל שפה רגולרית ניתן לבנות אוטומט מחסנית.

משפחת השפות חופשיות ההקשר סגורה תחת מספר פעולות :

- **שרשור** שתי שפות זו לזו .
- **איחוד** שתי שפות.
- **חיתוך** עם שפה רגולרית.
- הפעלת **סגור קלין** על שפה .

שרשור

(L1· L2 פירושו כל המילים אשר ניתן לחלק אותן לשני חלקים כך שהחלק השמאלי שייך ל L1 והימני ל L2)

דוגמה:

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b} מהצורה $a^{2n}b^n$ $n>0$

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b} מהצורה a^nb^n $n>0$

L3 = L1•L2 אם ידוע ש L1 חופשית הקשר ו L2 חופשית הקשר אזי L3=L1•L2 גם כן חופשית הקשר.

איחוד

(L1∪L2 פירושו כל המילים המתקבלות ב L1 או ב L2).

דוגמה:

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b} מהצורה $a^{2n}b^n$ $n>0$

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b} מהצורה a^nb^n $n>0$

L3 = L1∪L2 אם ידוע ש L1 חופשית הקשר ו L2 חופשית הקשר אזי L3=L1∪L2 גם כן חופשית הקשר.

דוגמה:

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b,c} מהצורה $a^nb^nc^k$ $n>0$

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b,c} מהצורה $a^kb^nc^n$ $n>0$

L3 = L1∪L2 אם ידוע ש L1 חופשית הקשר ו L2 חופשית הקשר אזי L3=L1∪L2 גם כן חופשית הקשר.

($L1 \cap L2$ פירושו כל המילים המתקבלות הן ב L1 והן ב L2).

חיתוך שפה חופשית הקשר עם שפה רגולרית נותן שפה חופשית הקשר

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b,c} מהצורה $n>0$ $a^n b^n c^k$

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b,c} שבהן מספר ה a זוגי.

$L3 = L1 \cap L2$ מכילה המילים מהצורה $n>0$ $a^{2n} b^{2n} c^k$.

חיתוך שתי שפות חופשיות הקשר שחיתוכן אינו חופשי הקשר

תהי L1 שפת כל המילים מעל {a,b,c} שבהן מספר ה a שווה למספר ה b .

תהי L2 שפת כל המילים מעל {a,b,c} שבהן מספר ה b שווה למספר ה c .

$L3 = L1 \cap L2$ מכילה מילים שבהם מספר ה a שווה למספר ה b שווה למספר ה c .

מכונת טיורינג

מכונת טיורינג הינה מודל מופשט המסוגל לבצע כל חישוב או אלגוריתם הניתן לביצוע במחשב.

המכונה מורכבת מהחלקים הבאים:

- סרט המחולק לתאים והוא אינסופי ימינה.
- ראש שמסוגל לקרוא את תוכן התא ולכתוב לתוכו מיד לאחר הקריאה ולאחר מכן לזוז ימינה או שמאלה.
- מצב התחלתי.
- הוראות המורות לראש מה לכתוב בתא, לאן לזוז (תא אחד ימינה או תא אחד שמאלה), ולאיזה מצב חדש לעבור, כל זאת בהתאם למצב הנוכחי (כפי שהוא רשום באוגר המצב) ולסמל/אות/סימן שנקרא מהתא הנוכחי. אם אין בטבלה התייחסות לצירוף של המצב והסמל הנוכחיים, המכונה עוצרת.

כל מרכיביה של מכונת טיורינג הם סופיים, מלבד הסרט שאינו מוגבל באורכו.

מכונת טיורינג מתחילה את פעולתה במצב ההתחלתי, כשעל הסרט כתוב מידע כלשהו - הקלט. הקלט הוא תמיד סופי, והאלפבית של האותיות שמרכיבות אותו הוא חלקי ממש לאלפבית של הסימנים שניתן לרשום על הסרט. הסימן "ריק" מטרתו לציין את סיום הקלט. המכונה יכולה לשנות את מצבו של הסרט ולבסוף עשויה לעצור או שלא לעצור.

הגדרת מספר אונרי:

1 ערכו 1

11 ערכו 2

111 ערכו 3

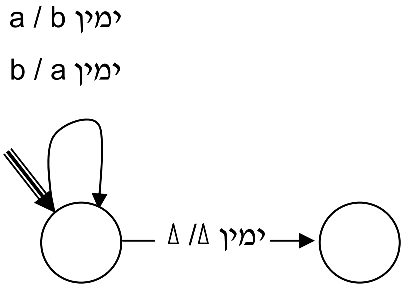
וכו

באופן כללי המכונה נעה על הסרט ימינה ושמאלה בהתאם לנדרש ומחליפה כל אות (סימן) באות, במטרה להגיע לתוצאה הרצויה.

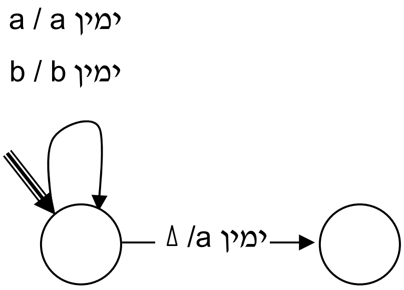
התוצאה הרצויה יכולה להיות החלטה אם מילה מתקבלת בשפה או שלא , או תוצאה של פונקציה מסוימת למשל שארית חלוקה בשלוש, או השלמת המספר למספר המתחלק בשלוש ללא שארית.

נא עיינו בדוגמאות הבאות: תחילה נראה דוגמה למכונה המבצעת פונקציה לאחר מכן נראה מכונה הבודקת שפה רגולריות(כאלה שניתן לבנות להן אס"ד), לאחר מכן מכונה הבודקת שפה חופשית הקשר (כאלה שאוטומט מחסנית יכול לטפל בהן) לאחר מכן מכונה שבודקת שפה שאינה חופשיות הקשר ולבסוף נחזור ונראה מכונות המבצעות פונקציות.

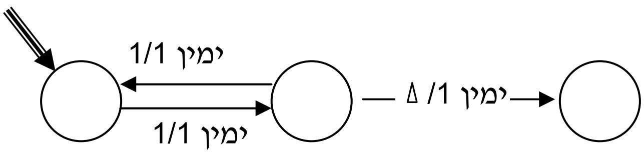
מכונת טיורינג המחליפה a ל b ו b ל a(מעל a,b)



מכונת טיורינג המוסיפה a בסוף המילה(מעל a,b)



מכונת טיורינג המוסיפה 1 למילה באורך איזוגי(מעל 1)

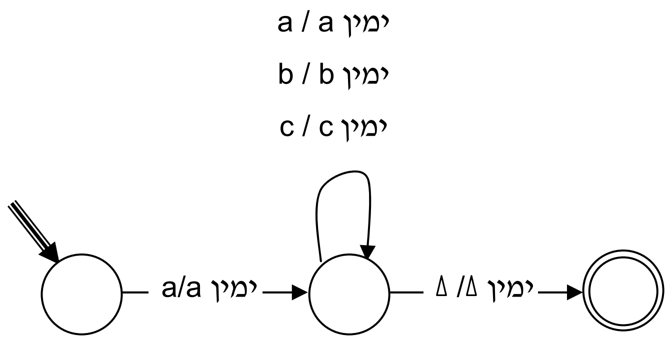


מכונת טיורינג לבדיקת שפות רגולריות

(ניתן לבנות להן אוטומט סופי דטרמיניסטי)

בנה מכונת טיורינג ה
מקבלת את המילים המתחילות ב a מעל {a,b,c}

הרעיון בניה על סמך אס״ד מתאים. ***מקרי קצה שיש לבדוק*** ab ba .

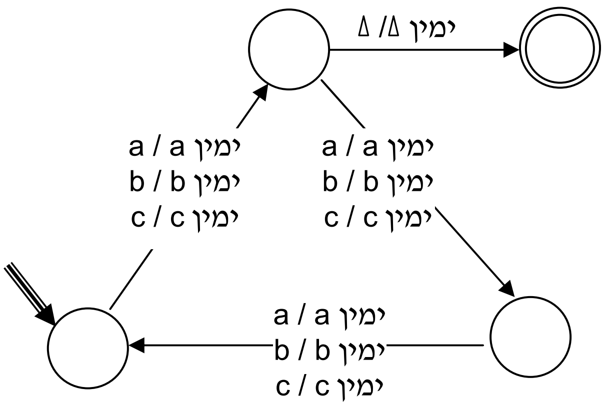


בנינו מכונת טיורינג לשפה רגולרית.

שימו לב שהרעיון מבוסס על בנית אס״ד מתאים.

בנה מכונת טיורינג ה
מקבלת את המילים מעל {a,b,c} שאורכן מתחלק בשלוש עם שארית 1 .

הרעיון בניה על סמך אס״ד מתאים. ***מקרי קצה שיש לבדוק*** a aa aaa .



בנינו מכונת טיורינג לשפה רגולרית.

מכונת טיורינג לשפות חופשיות הקשר

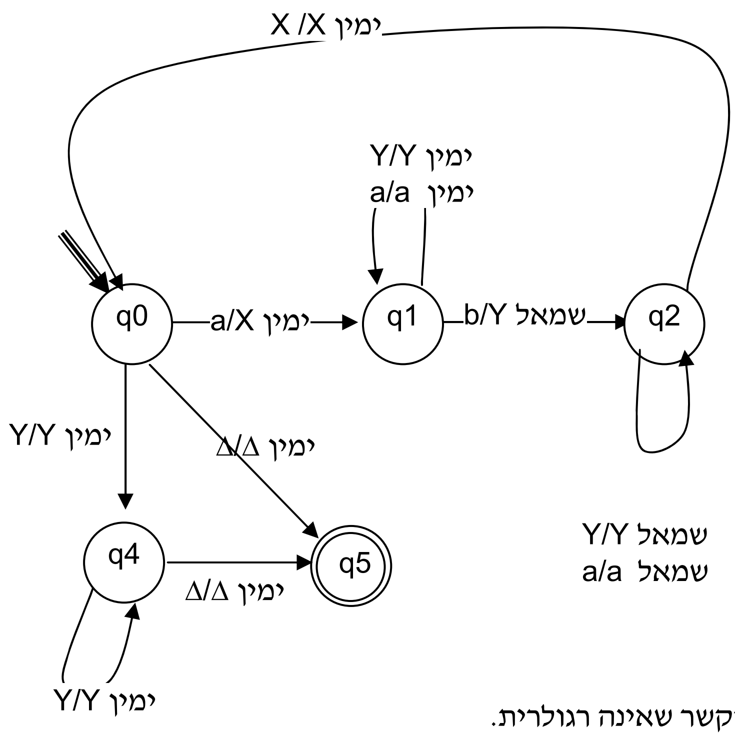
(ניתן לבנות להן אוטומט מחסנית)

בנה מכונת טיורינג ה

מקבלת את המילים מעל {a,b} מהצורה a^nb^n $n\geq0$

הרעיון להפוך את a ל X לחפש b ולהפוך ל Y . בסוף התהליך לסרוק שיש רק Y שפירושו שאין יותר b מ a.

מקרי קצה שיש לבדוק ab abb aab aba bab .



בנינו מכונת טיורינג לשפה חופשית הקשר שאינה רגולרית.

שים לב

עבור מילה המתחילה ב b נתקע ב q0

עבור aabbbbb נתקע ב b הראשון המיותר (aabb**<u>b</u>**bb) ובמצב q4

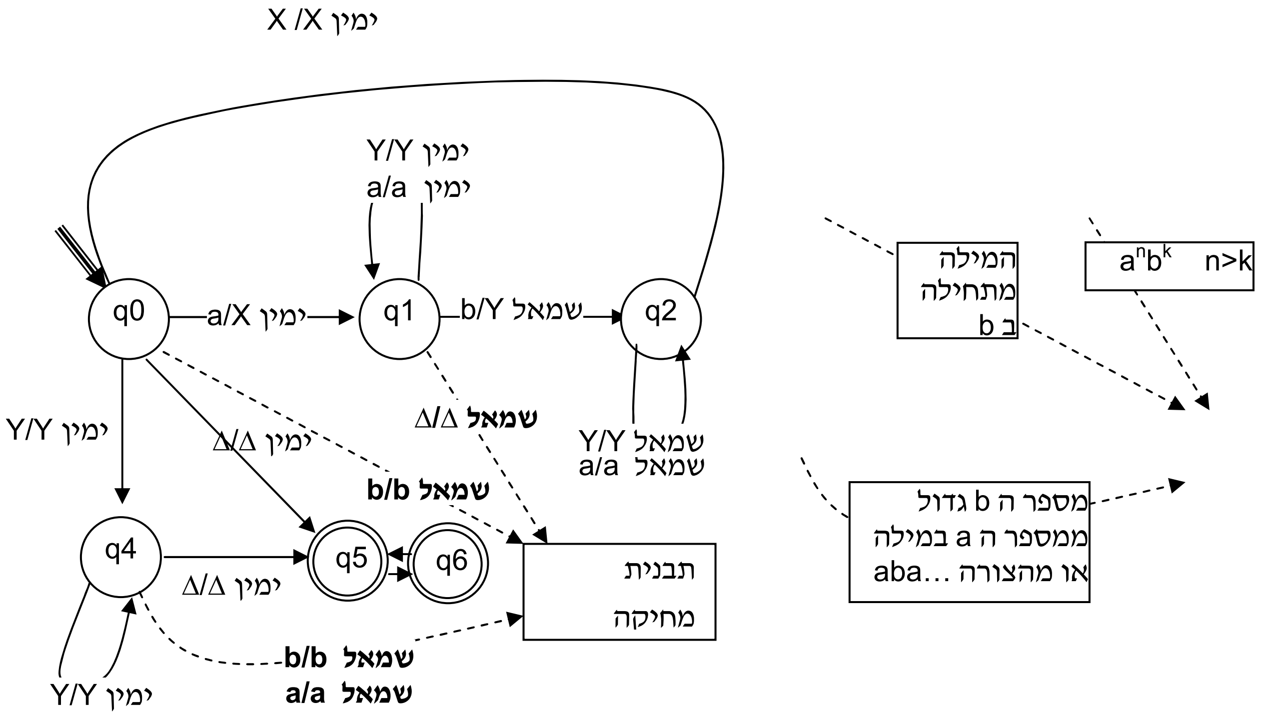
ועבור aaaabb נתקע ב a מיותר ובמצב q1 כאשר לא קיים עבורו b.

בנה מכונת טיורינג ה

מקבלת את המילים מעל {a,b} מהצורה $a^n b^n$ n≥0

באם המילה אינה מתקבלת יש למחוק אותה מהסרט באם מתקבלת יש לנוע סביב הרווח הראשון.

הרעיון כמו בתרגיל הקודם רק שיש להוסיף את המקרים המבוקשים.



בנינו מכונת טיורינג לשפה חופשית הקשר שאינה רגולרית.

שים לב

עבור מילה מהצורה $a^n b^k$ n>k לדוגמה aaaabb נתקע ב a מיותר ובמצב q1 כאשר לא קיים עבורו b.

עבור מילה המתחילה ב b נתקע ב q0

עבור aabbbbb נתקע ב b הראשון המיותר (aabb<u>**b**</u>bb) ובמצב q4

עבור aababb נתקע ב a השלישי (aab<u>**a**</u>bb) ובמצב q4

עבור aabba נתקע ב a השלישי (aab<u>**a**</u>bb) ובמצב q4

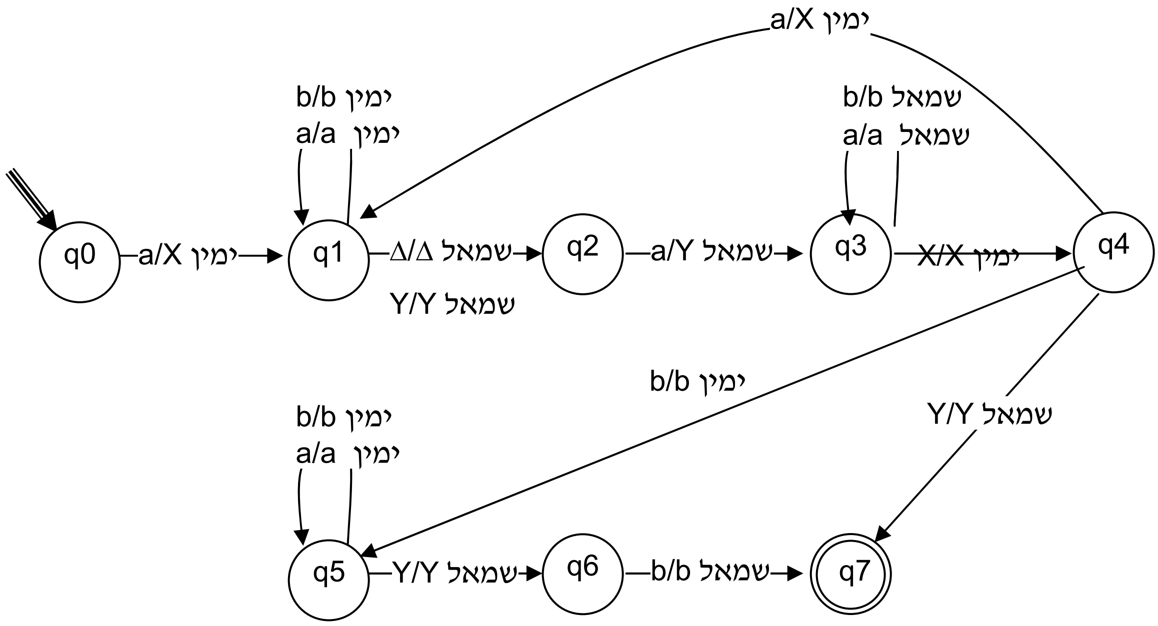
ליד q5 q6 יש להוסיף Δ/Δימין Δ/Δשמאל

בנה מכונת טיורינג ה
מקבלת מילים מעל {a,b} שמתחילות ב a ומסתיימות ב a ואורך רצף ה a בהתחלה ובסוף שווה

הרעיון להפוך את a ל X לחפש a בסוף ולהפוך ל Y

מקרי קצה שיש לבדוק aabaa aaaa aaababaa aababababaaa baa aab (רק שני הימניים מתקבלים).

ניתן לפתור באמצעות אטומט מחסנית לא דטרמיניסטי (דטרמיניסטי אם יש לפחות b אחת).

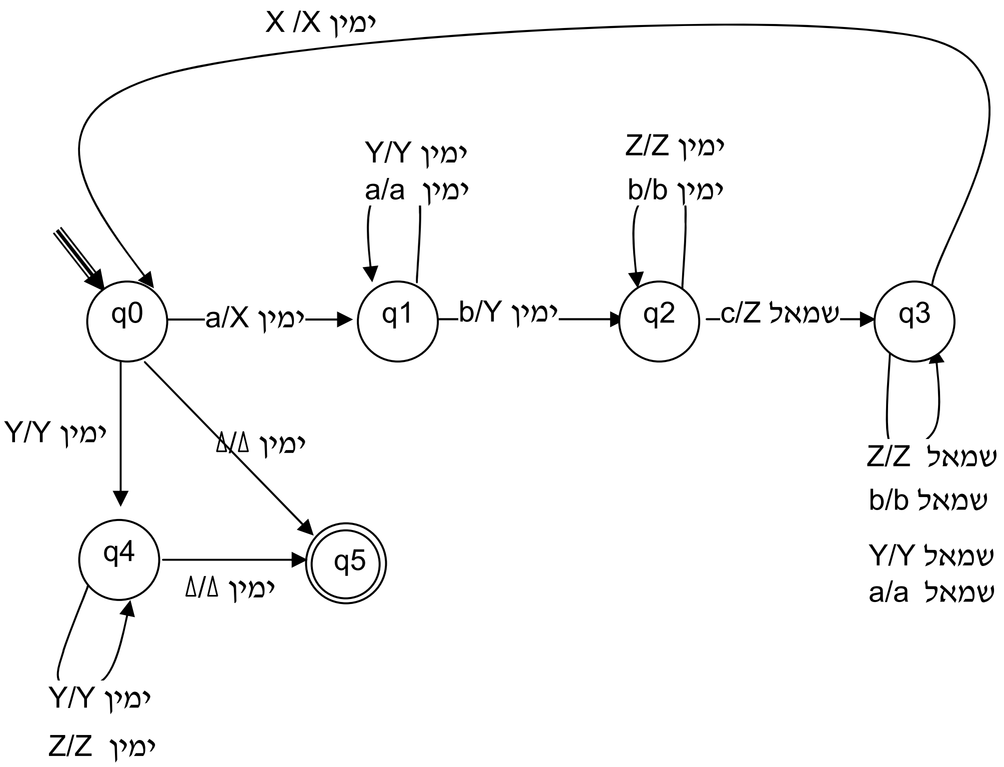


מכונת טיורינג לשפות לא חופשיות הקשר

בנה מכונת טיורינג ה
מקבלת את המילים מעל {a,b,c} מהצורה $a^n b^n c^n$ $n \geq 0$

הרעיון להפוך את a ל X לחפש b ולהפוך ל Y לחפש c ולהפוך ל Z

מקרי קצה שיש לבדוק n שווה לאפס,   abc aba aabc abcc



מכונת טיורינג – תרגילים שונים

בנה מכונת טיורינג ה
מקבלת רצף של a מוסיפה a בסופו ותוחמת את רצף ה a ים בסימני דולר.

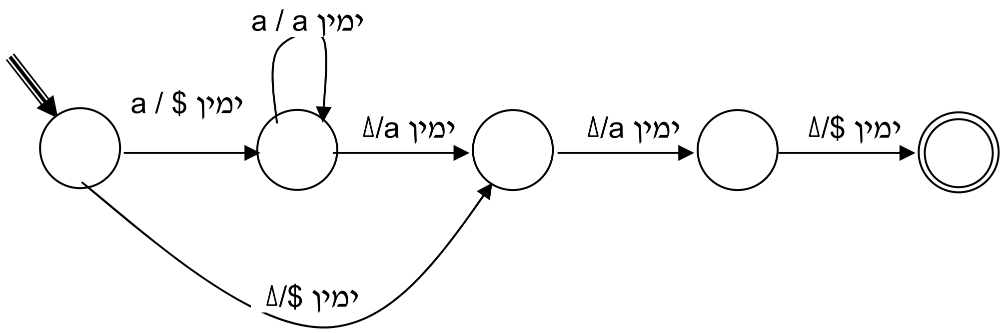
המטרה : לקבל תוצאה תחומה בין שני סימני דולר

דוגמת סרט לפני : $\vdash$aaaaaaaaΔ

דוגמת סרט אחרי : $\vdash$\$aaaaaaaaa\$$\Delta$

מקרה קצה : מספר ה a ים שווה לאפס, כלומר אין aים.

הרעיון : את ה a הראשון נהפוך לדולר , שני רווחים בסוף נהפוך לשני a ורווח נוסף יהפוך לדולר.



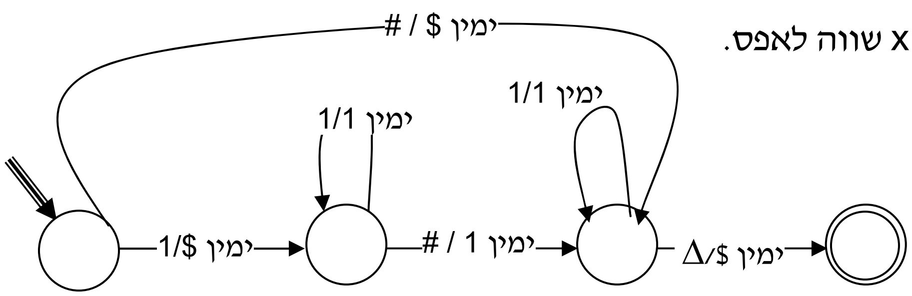
חיבור f(x,y)=x+y

הקלט הינו במבנה הבא $\vdash$1111111#1111Δ

הפלט : $\vdash$\$11111111111\$$\Delta$

המטרה : לקבל תוצאה תחומה בין שני סימני דולר

מקרה קצה : x שווה לאפס.

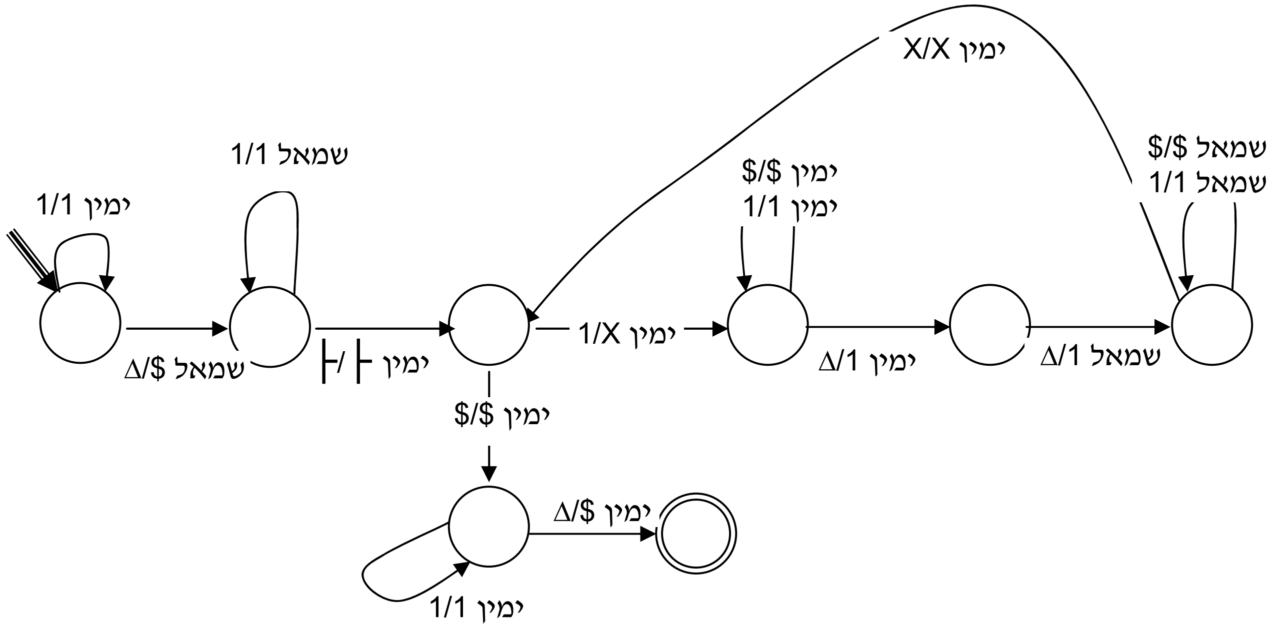


f(x)=2x

הקלט הינו במבנה הבא $\vdash 111\Delta$

המטרה : לקבל תוצאה תחומה בין שני סימני דולר $111111$$

מקרה קצה : x שווה לאפס.

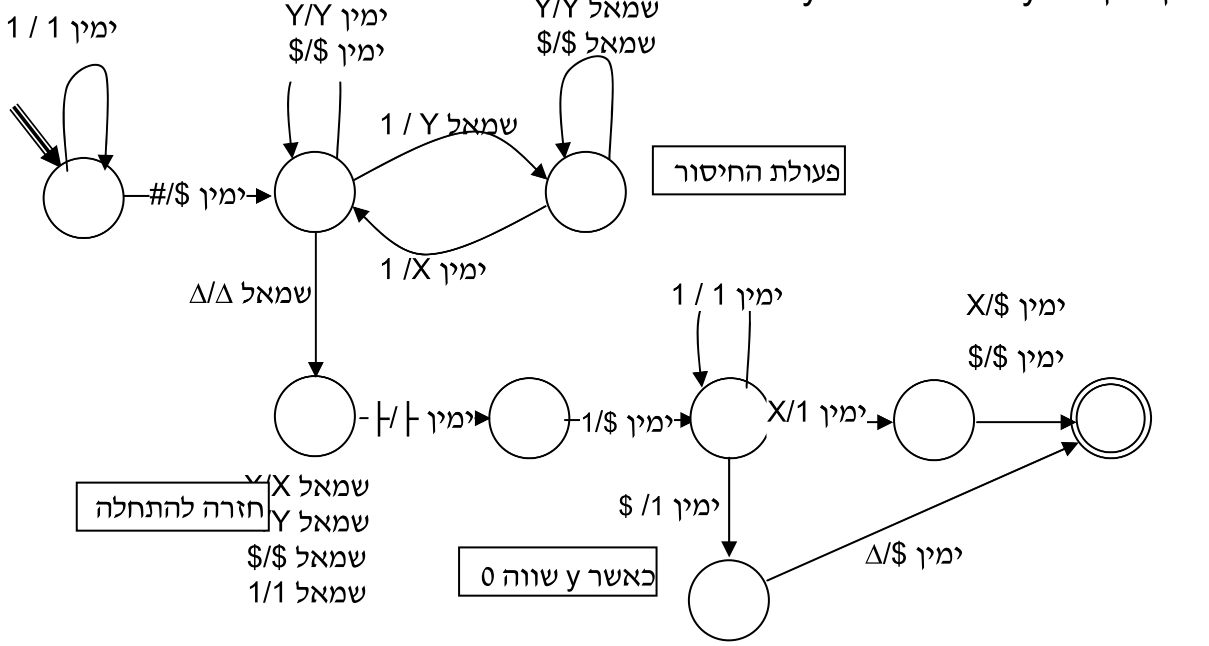


חיסור ***f(x,y)=x-y   x>y x>0***

הקלט הינו במבנה הבא $\vdash 1111111\#111\Delta$

המטרה : לקבל תוצאה תחומה בין שני סימני דולר $\vdash$....1111....

מקרי קצה : y שווה אפס   y שווה 1

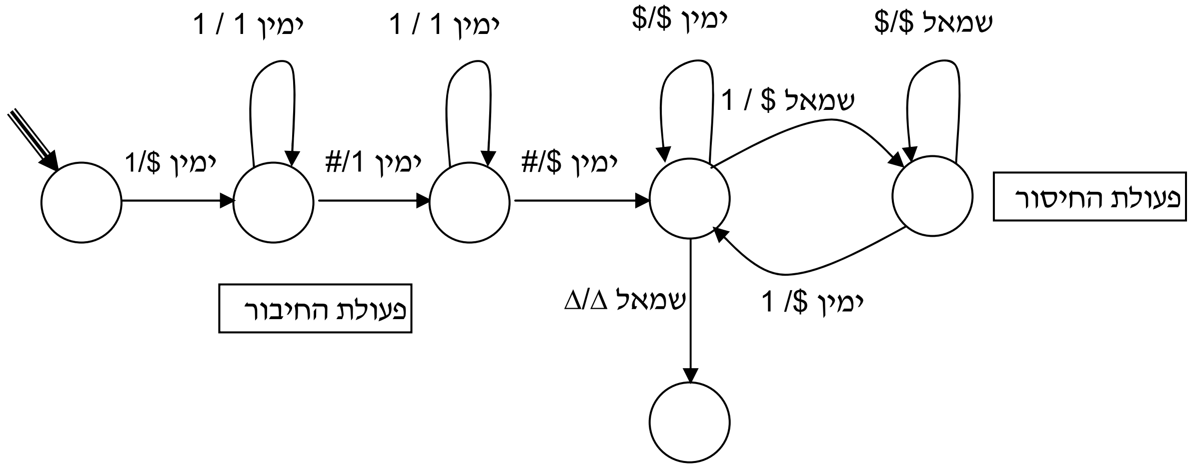


למעשה ניתן בפיתרון להשתמש ב X בלבד ואין צורך בשימוש בשתי אותיות גדולות שונות.

חיסור f(x,y)=x+y-z x+y>z x >0 y≥0

הקלט הינו במבנה הבא x=7 y=4 z=5 ├1111111#1111#11111Δ

המטרה : לקבל תוצאה תחומה בין שני סימני דולר ├….111111....



בנה מכונת טיורינג ה (תרגיל לא ברמת בגרות)

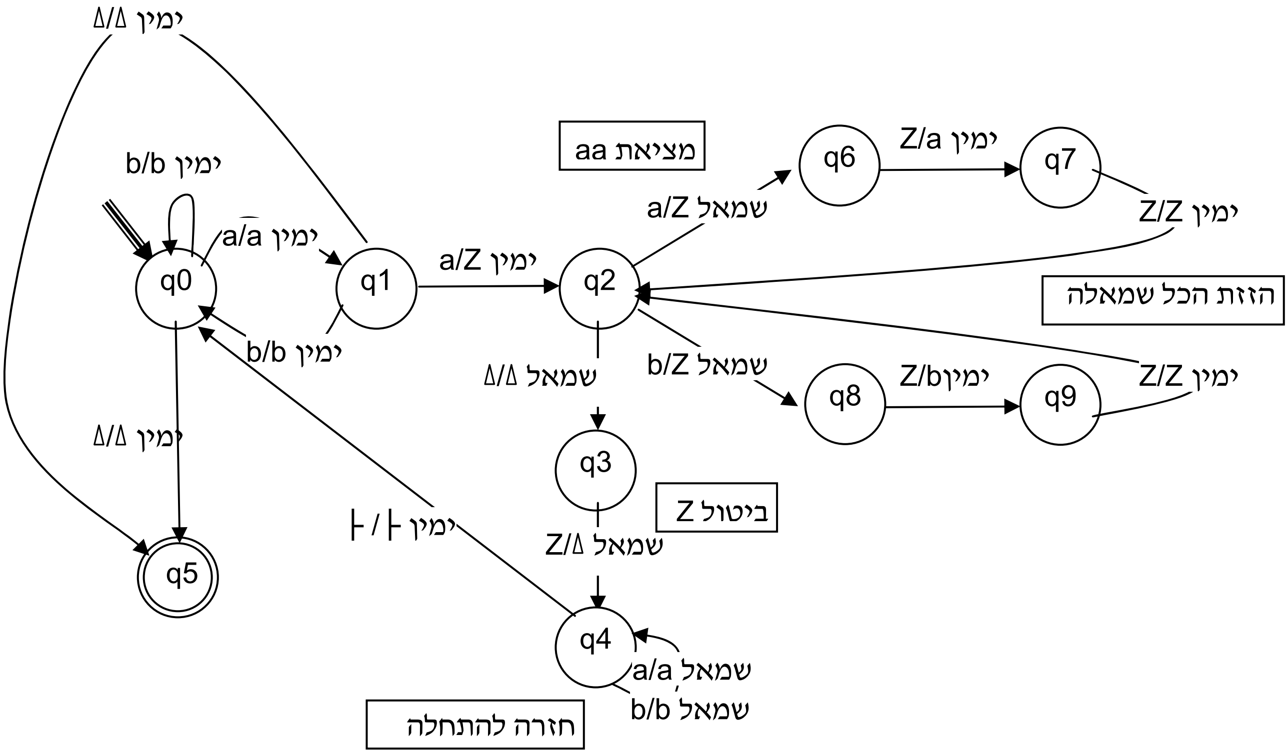
ממירה כל רצף a ים ל a בודד למילה מעל {a,b}

דוגמה : עבור baaaabbabaabbba נקבל babbababbba

רעיון : כאשר נתקל ברצף aa נבטל את ה a השני ונזיז את כל מה שבא אחריו אחד שמאלה.

נחזור לתו השמאלי ביותר ונחפש שוב aa. אם לא מצאנו אזי סיימנו.

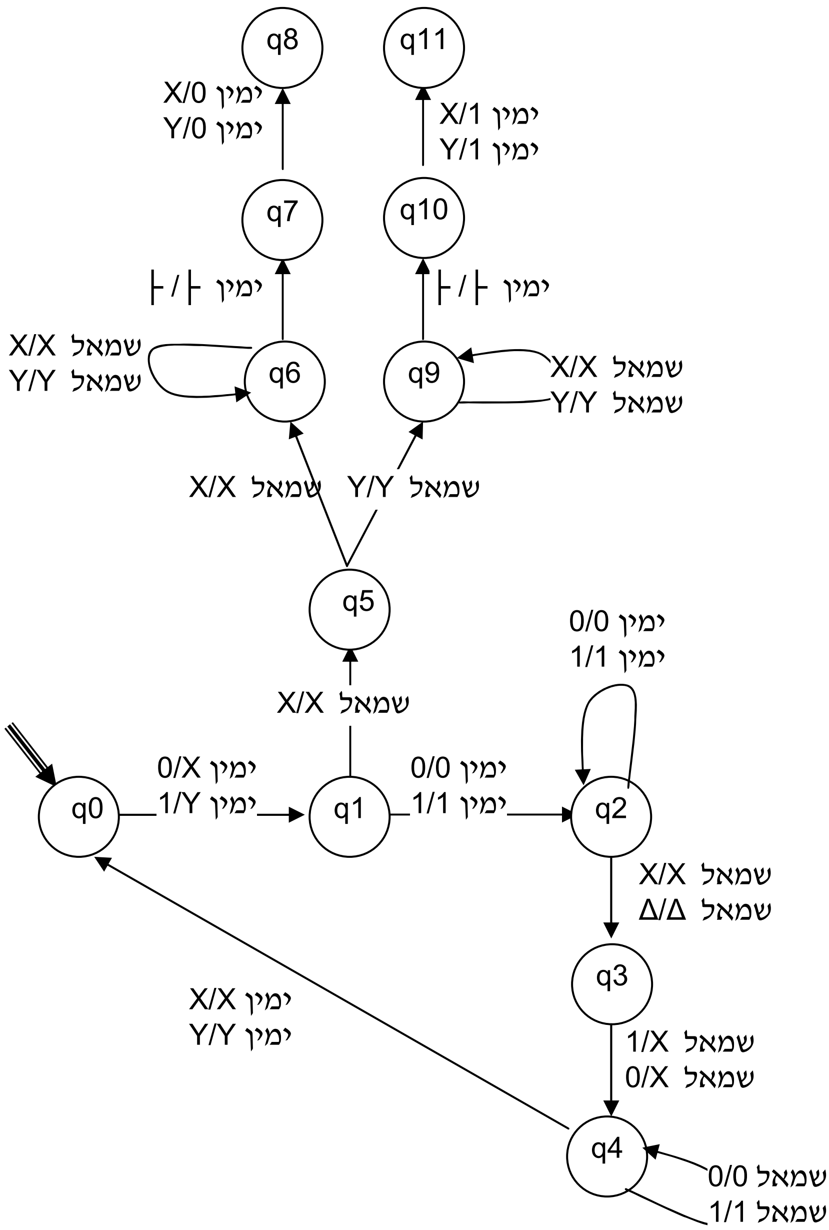
מקרה קצה : א. מילה ריקה ב. a.



נתונה מכונת טיורינג המקבלת על הסרט מילה באורך אי זוגי שאורכה לפחות 3.

א. בצע מעקב עבור המילה 01100 .

ב. רשום מה מבצעת המכונה.



פתרון (כל מעקב שבו מובן מה עושים מתקבל)

מצב	אות נבדקת	מצב חדש	שינוי
q0	**0**1100	q1	0→X
q1	X**1**100	q2	ללש
q2	X1**1**00	q2	ללש
q2	X11**0**0	q2	ללש
q2	X110**0**	q2	ללש
q2	X1100 **Δ**	q3	ללש
q3	X110**0**	q4	0→X
q4	X11**0**X	q4	ללש
q4	X1**1**0X	q4	ללש
q4	X**1**10X	q4	ללש
q4	**X**110X	q0	ללש
q0	X**1**10X	q1	1→Y
q1	XY**1**0X	q2	ללש
q2	XY1**0**X	q2	ללש
q2	XY10X	q3	ללש
q3	XY1**0**X	q4	0→X
q4	XY**1**XX	q4	ללש
q4	X**Y**1XX	q0	ללש
q0	XY**1**XX	q1	1→Y
q1	XYY**X**X	q5	ללש
q5	XY**Y**XX	q9	ללש
q9	X**Y**YXX	q9	ללש
q9	**X**YYXX	q9	ללש
q9	├XYYXX	q10	ללש
q10	**X**YYXX	q11	X →1

המכונה רושמת במקום הראשון במילה את התו האמצעי.

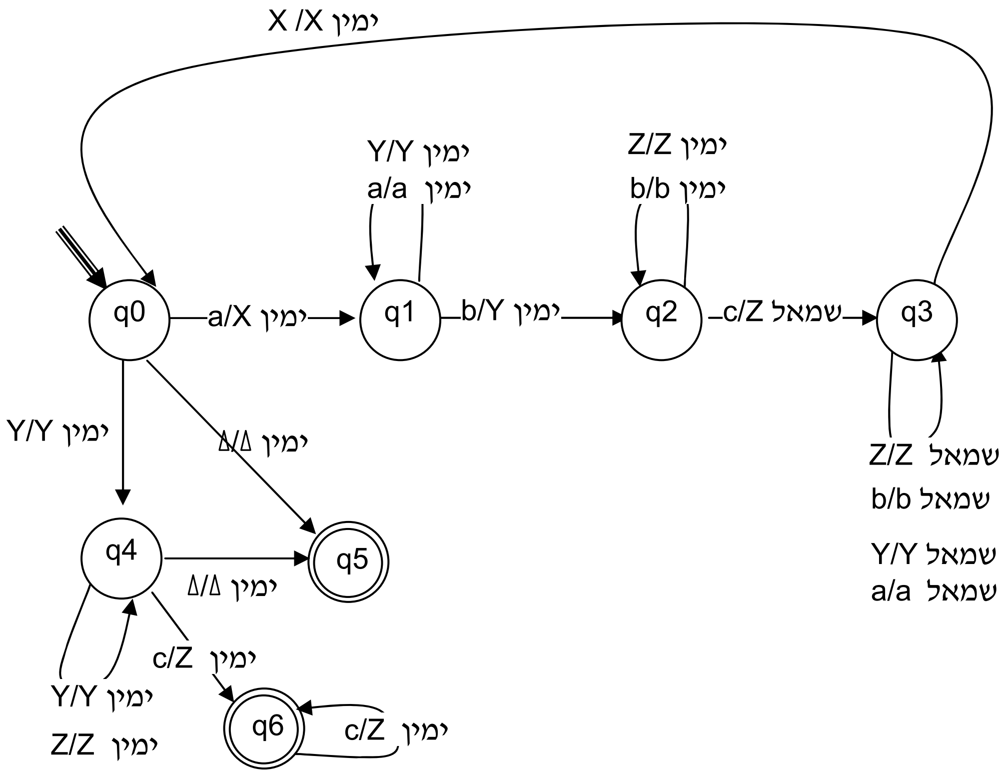
תרגילים במכונת טיורינג

1. בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה: $L=\{a^nb^nc^m|m>=n\}$
2. בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה: $L=\{a^nb^nc^{2n}|n>=0\}$
3. בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה: $L=\{a^nb^nc^m|n>=m\}$
4. בנה מכונת טיורינג המקבלת מילה מעל הא״ב $\{a,b,c\}$ ובודקת האם היא שייכת לשפה L.

   $L=\{a^nb^{2n}c^m \mid n>=0$, m היא שארית החלוקה של n ב – 2 }
5. בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה מעל $\{a,b\}$: מילה שייכת לשפה אם היא ריקה, או שהיא מכילה לפחות b אחת וגם מתחילה ומסתיימת בדיוק באותו רצף של אותיות a למשל:

   aabababb**aa** **a**bbab**a** babbb
6. בנה מכונת טיורינג המקבלת מילה מעל הא״ב $\{a,b\}$ ומחזירה אותה מילה הפוכה תחומה בסימני $.
7. נתונה על הסרט מילה מעל הא״ב $\{a,b\}$ יש לכתוב באונרית את מספר ה-a המופעים במילה תחום בסימני $
8. בנה מוכנת טיורינג המקבלת מילה מעל א״ב $\{a,b\}$ ומחזירה את ההפרש בין מספר a ומספר ה-b בין תחום $.
9. בנה מכונת טיורינג המקבלת מילה מעל א״ב $\{a,b\}$ ובודק אם המילה היא באורך זוגי ומסתיימת ב-aa,אם כך המכונה מקבלת אותה,אחרת יש למחוק את המילה מהסרט.
10. נתונה על הסרט מספר X באונרית יש לכתוב על הסרט X+1 תחום בין $.
11. נתונה על הסרט מספרים X,Y באונרית מופרדים ע״י #,יש לכתוב על הסרט X+Y+1 באונרית תחום בין סימני $.
12. נתונה על הסרט מספרים X,Y באונרית מופרדים ע״י #,יש לכתוב על הסרט X-Y באונרית תחום בין סימני $(X>=Y)
13. נתונה על הסרט מספרים X,Y באונרית מופרדים ע״י #,יש לכתוב על הסרט X DIV Y באונרית תחום בין סימני $(Y≠0)
14. נתונה על הסרט מספרים X,Y באונרית מופרדים ע״י #,יש לכתוב על הסרט X % Y באונרית תחום בין סימני $(Y≠0)
15. נתונה על הסרט מילה מהשפה $L=\{a^nb^m|n>=m\}$ יש לכתוב על הסרט n-m באונרית תחום בין סימני $
16. בנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה: $f(x,y,z)=x+y-z$ כאשר x,y,z מספרים חיוביים. התוצאה תהיה בין סימני $
17. בנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה: $f(x)=3x$
18. בנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $f(x)=x / 2$ (הערך השלם)
19. בנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $f(x,y)=(x*y)$
20. בנה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $f(x,y)=(x+y)2$

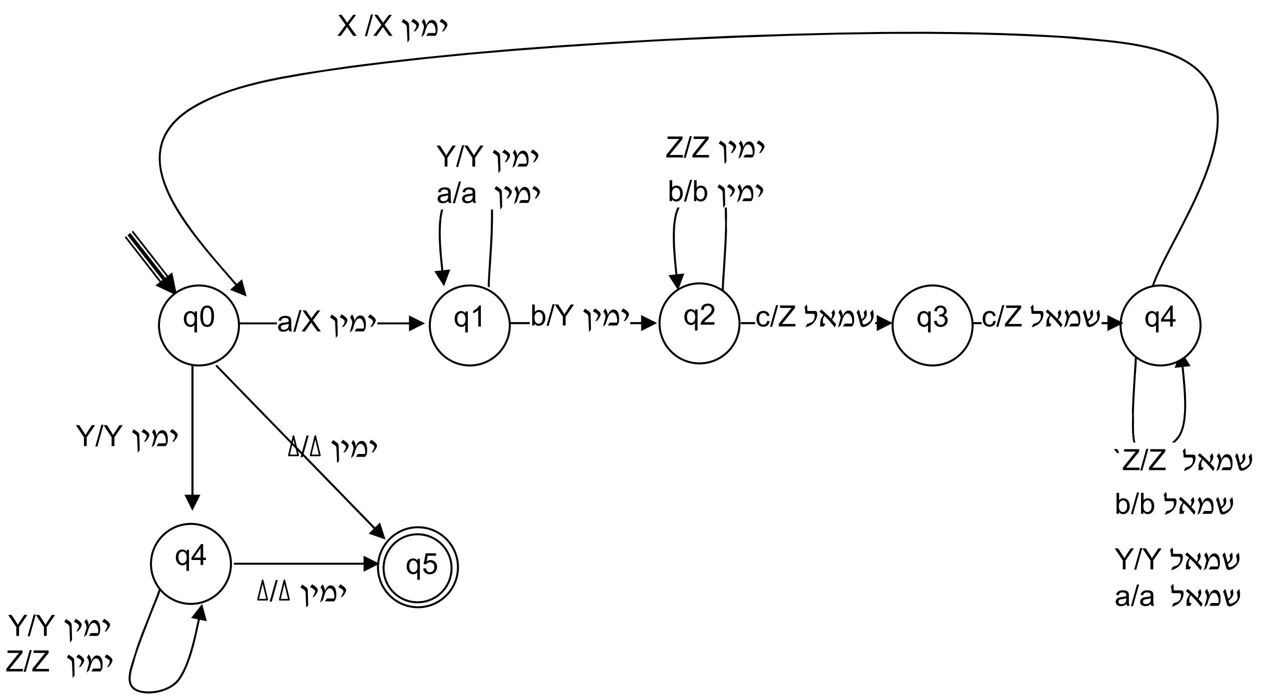
פתרון 1



X /X ימין
Y/Y ימין
a/a ימין
Z/Z ימין
b/b ימין
q0
a/X ימין
q1
b/Y ימין
q2
c/Z שמאל
q3
Y/Y ימין
Δ/Δ ימין
Z/Z שמאל
b/b שמאל
Y/Y שמאל
a/a שמאל
q4
q5
Δ/Δ ימין
c/Z ימין
Y/Y ימין
Z/Z ימין
q6
c/Z ימין

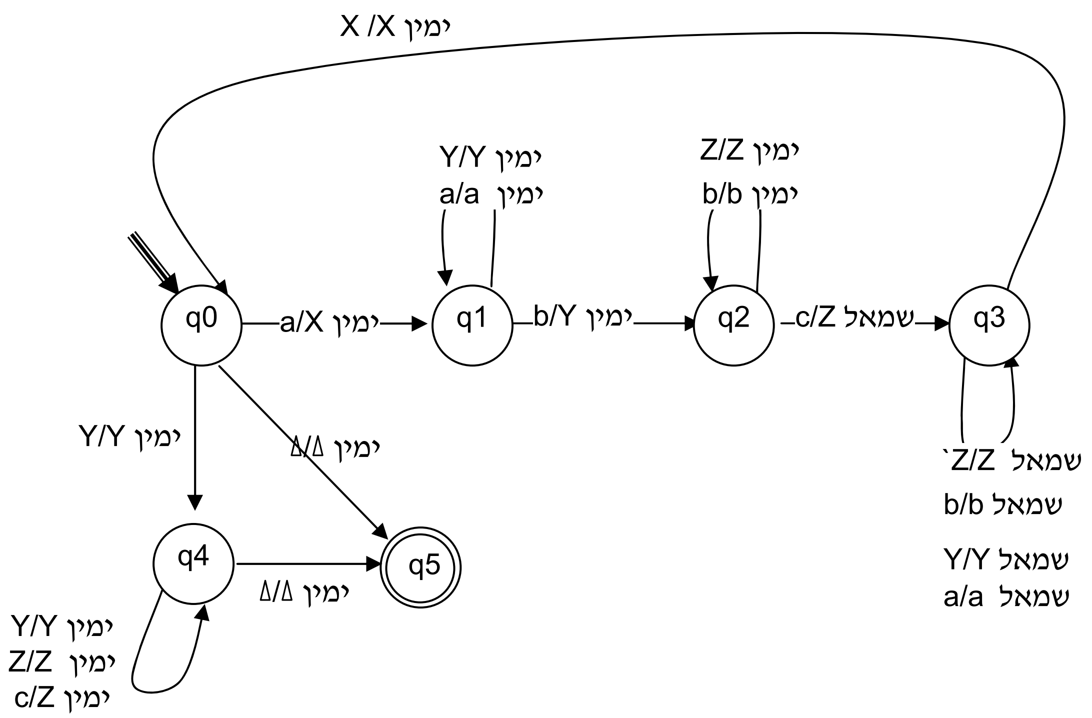
בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה:

$L= a^n b^n c^{2n} \quad n>=0$



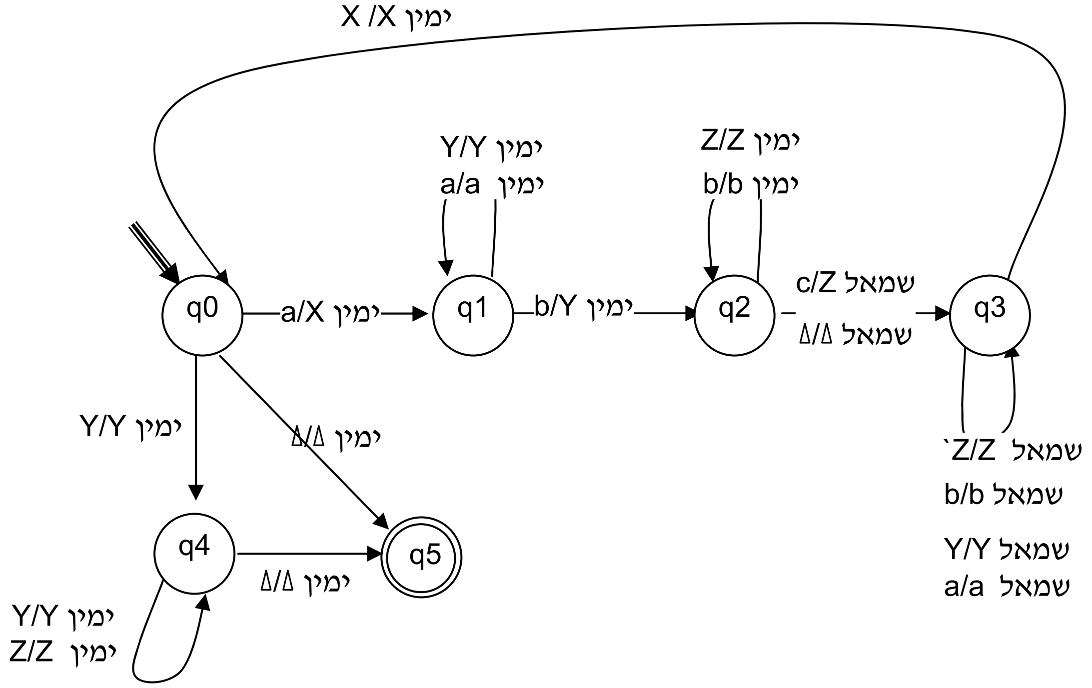
בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה:

$L= a^n b^n c^m \quad m>=n$



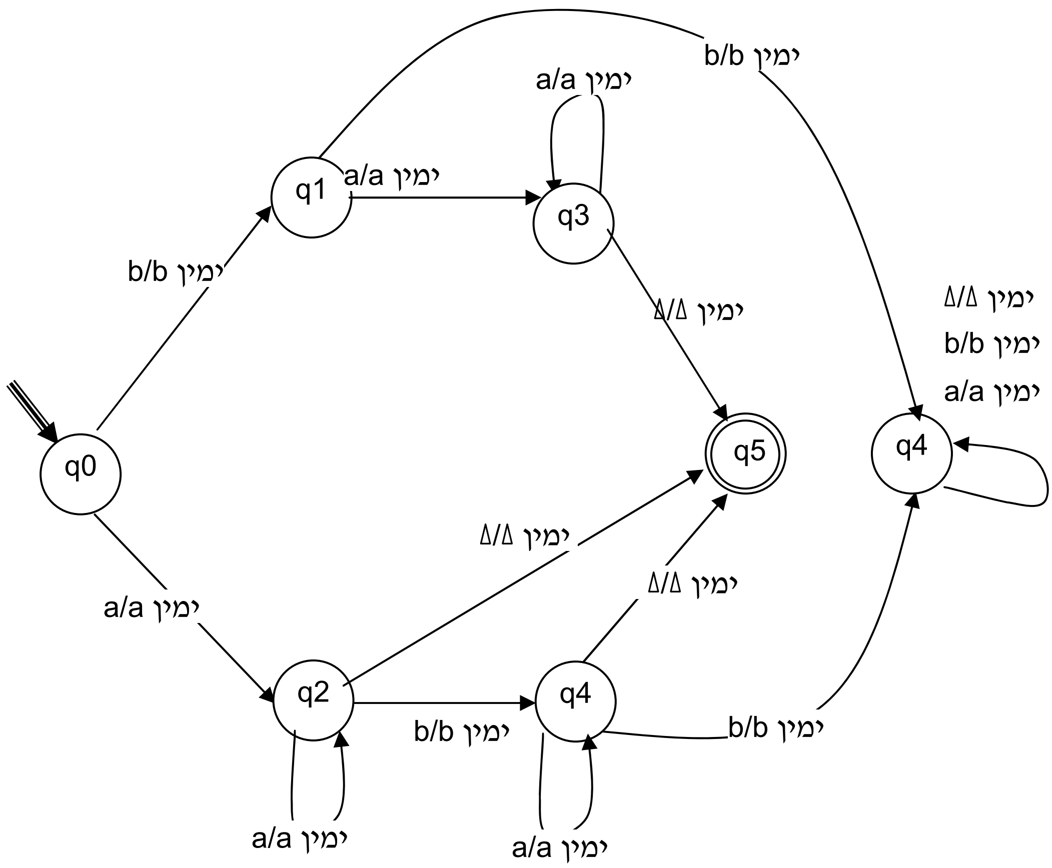
בנה מכונת טיורינג לשפה הבאה:

L= $a^n b^n c^m$ n>=m



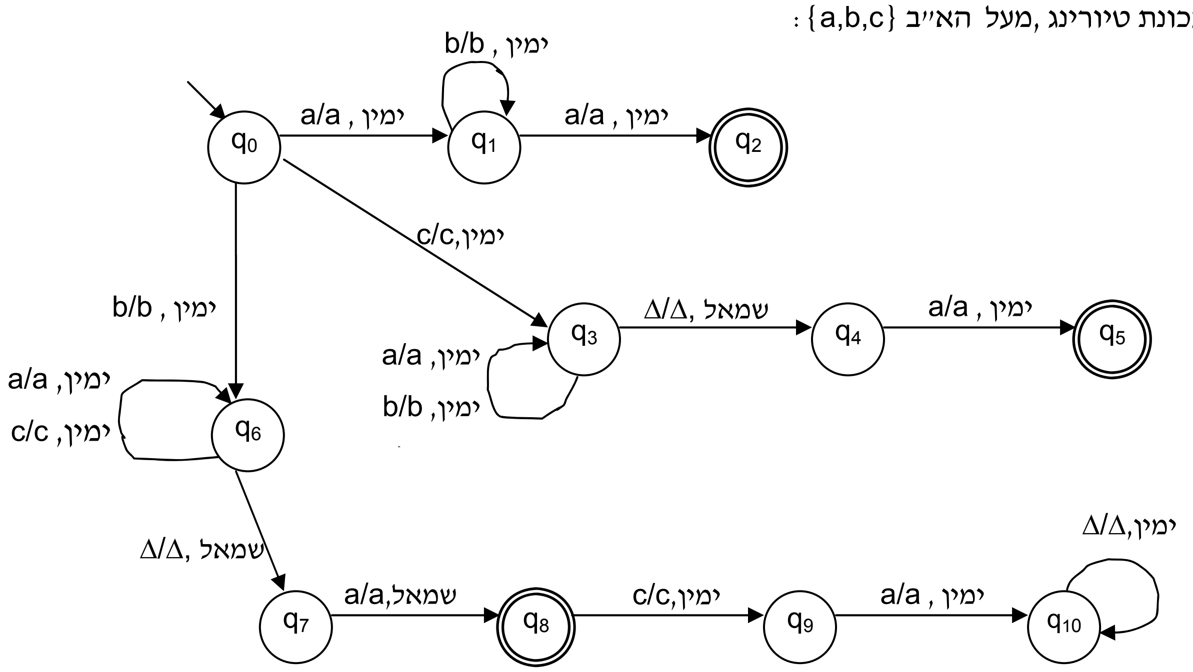
בנה מכונת טיורינג המקבלת את כל המילים מעל א"ב {a,b} שיש בהן לפחות a אחד ולכל היותר b אחד.

אם יש יותר מ b אחד, המכונה לא תעצור.



מהי השפה המתקבלת על ידי מכונת טיורינג

נתונה מכונת טיורינג ,מעל הא״ב {a,b,c} :



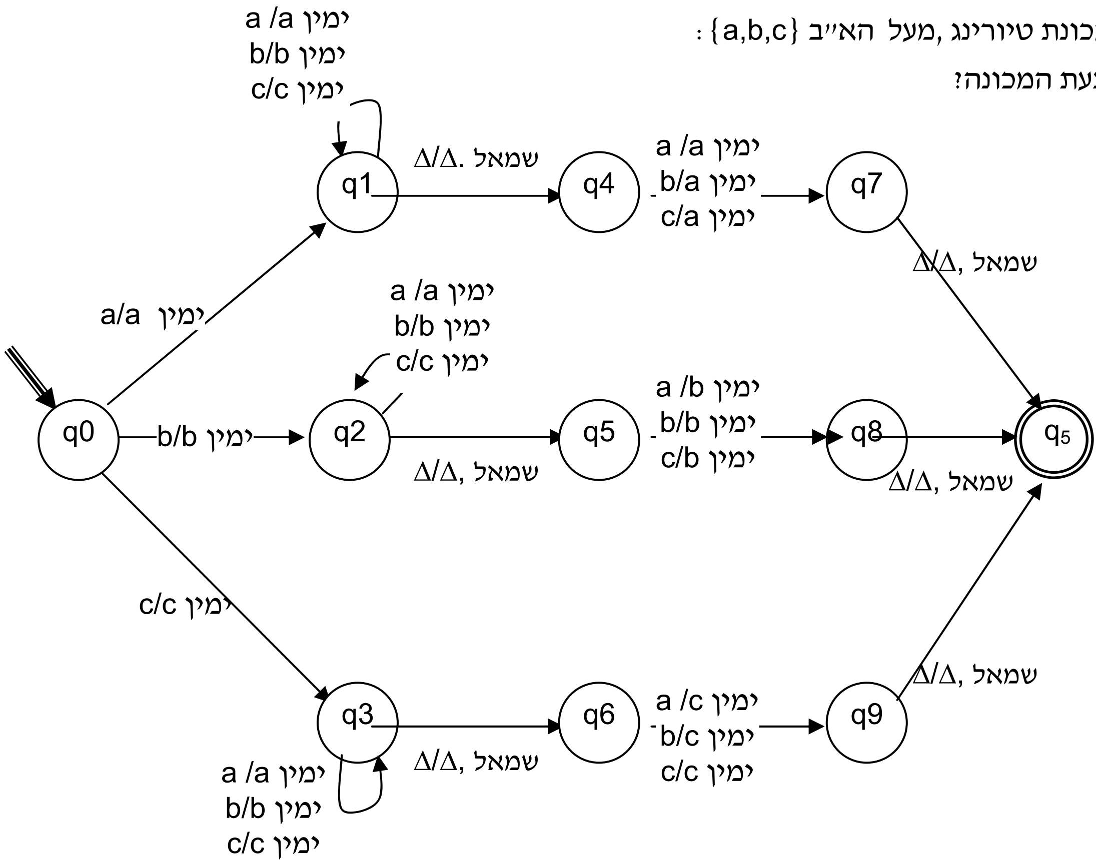
1.1. הצג את תהליך חישוב של המכונה על כל אחת מהמילים הבאות : abac , cabc , bca, ba

1.2. תאר את קבוצת המילים מעל הא״ב {a,b,c} עבורן המכונה לא עוצרת.

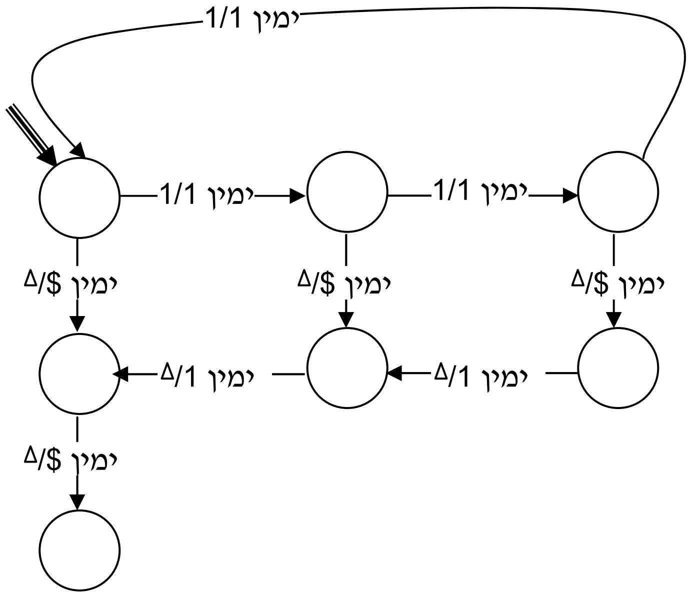
1.3. מהי השפה המתקבלת על-ידי מכונה זו?

נתונה מכונת טיורינג ,מעל הא״ב {a,b,c} :

מה מבצעת המכונה?

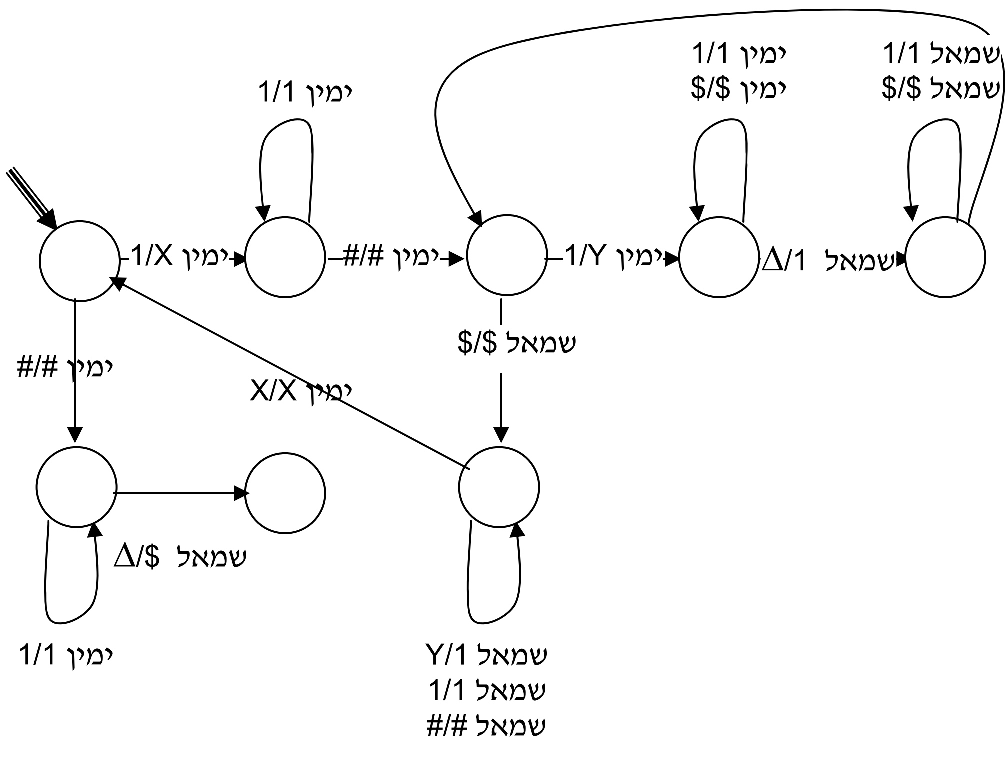


מה מבצעת מכונת טיורינג הבאה?



כפל f(x,y)=x*y x>0 y>0

x ו y אונריים ומופרדים ב # ובסוף סימן $ ├1111111#111$ΔΔΔ



פתרון ל 9

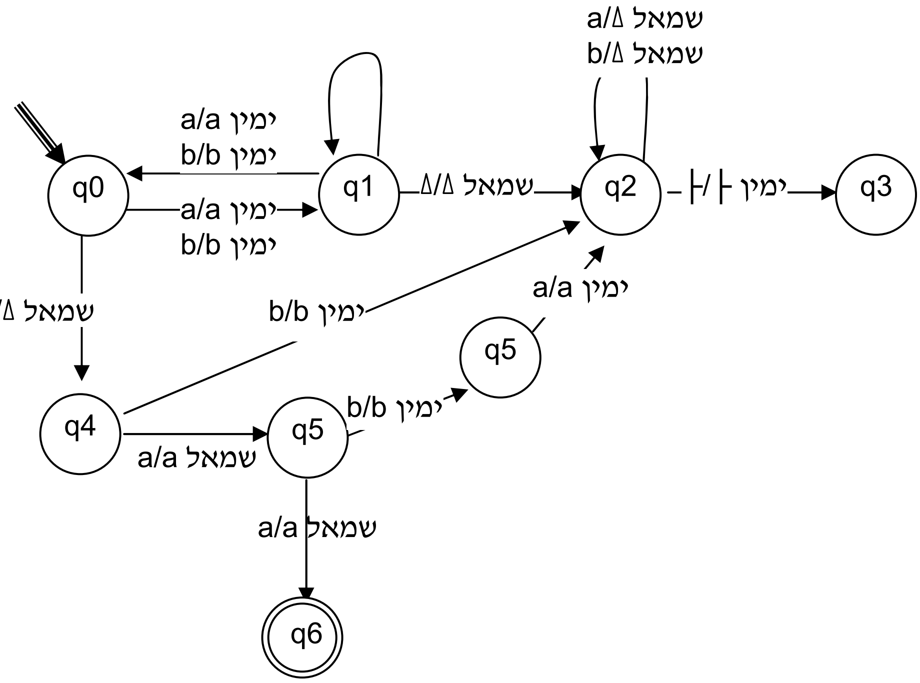
בנה מכונת טיורינג המקבלת מילה מעל א״ב {a,b } ובודקת אם המילה היא :

באורך זוגי ומסתיימת ב- *aa*

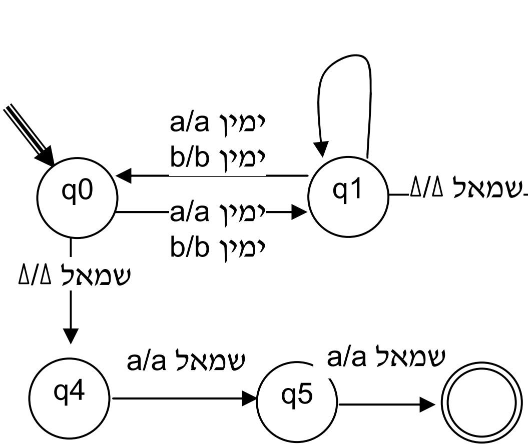
אם כך המכונה מקבלת אותה,אחרת יש למחוק את המילה מהסרט.

הרעיון : בדיקת זוגיות תחילה ולאחר מכן בדיקה ששני האחרונים a.

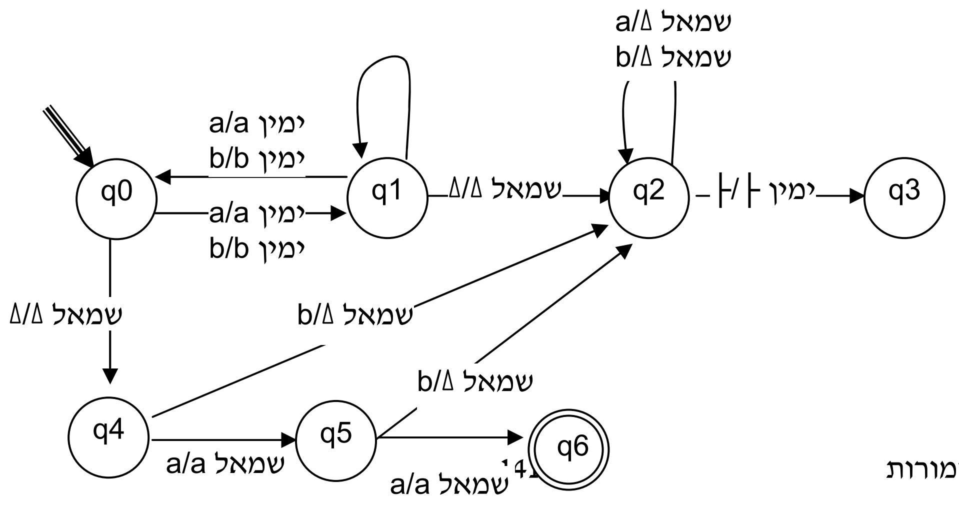
באם לא זוגי או אין שני a ים הולכים לסוף וחזורים תוך מחיקה.



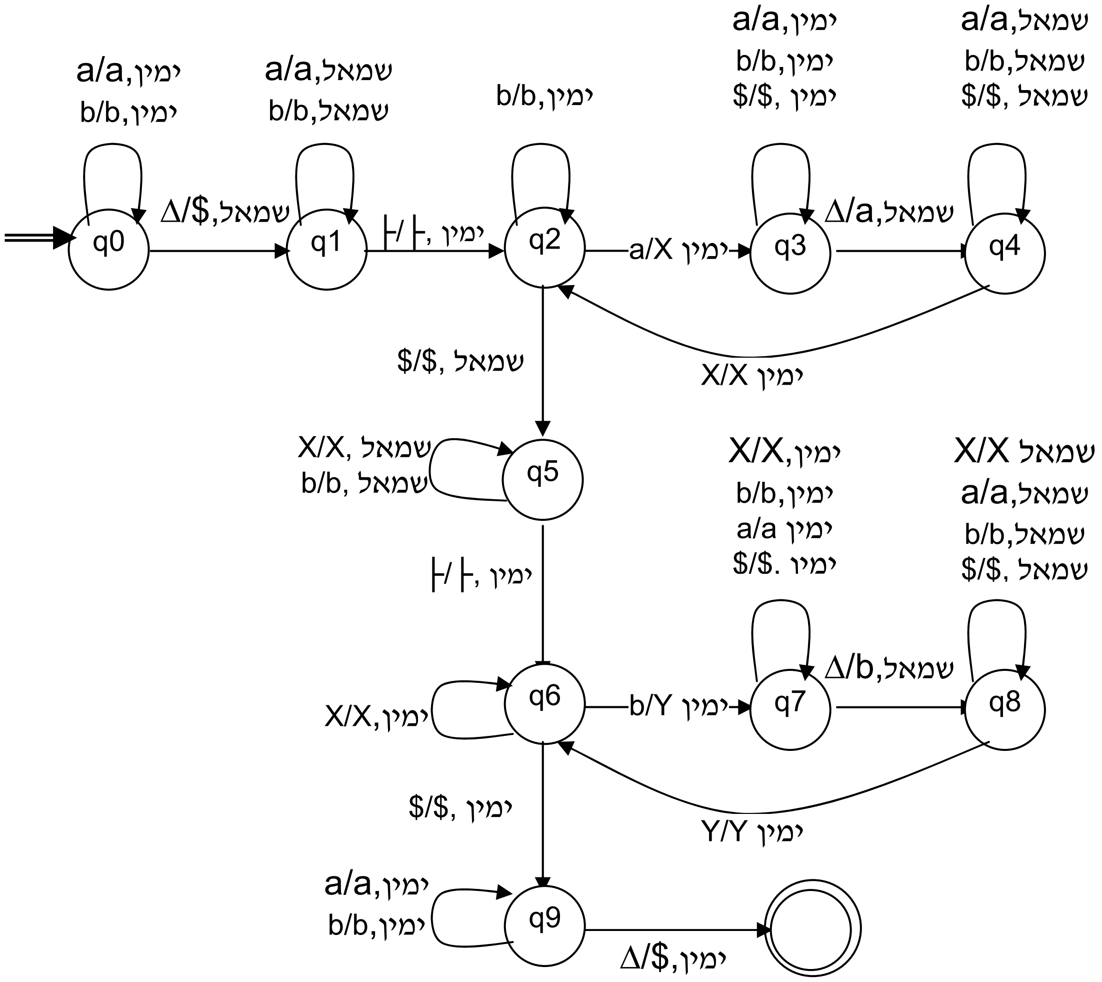
פתרון שגוי ראשון



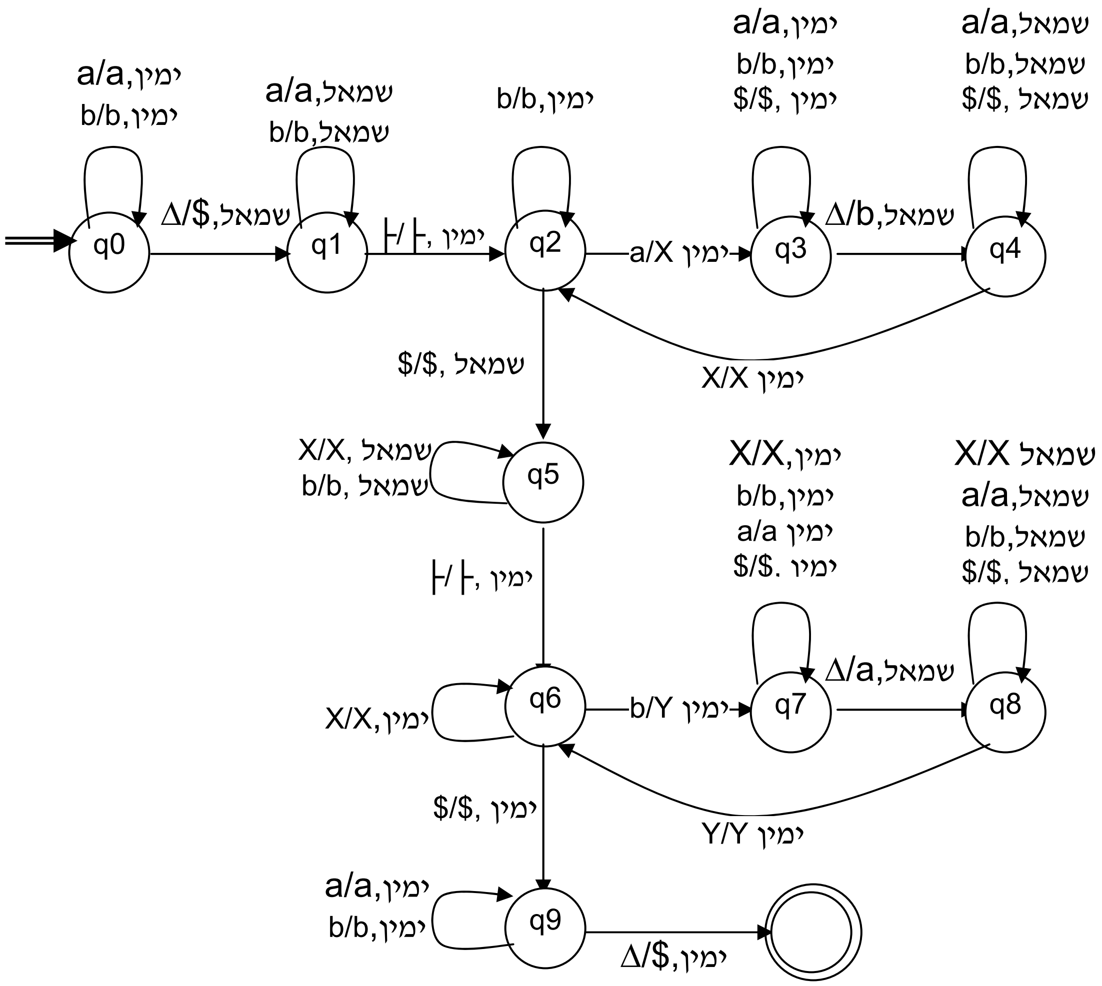
פתרון שגוי שני



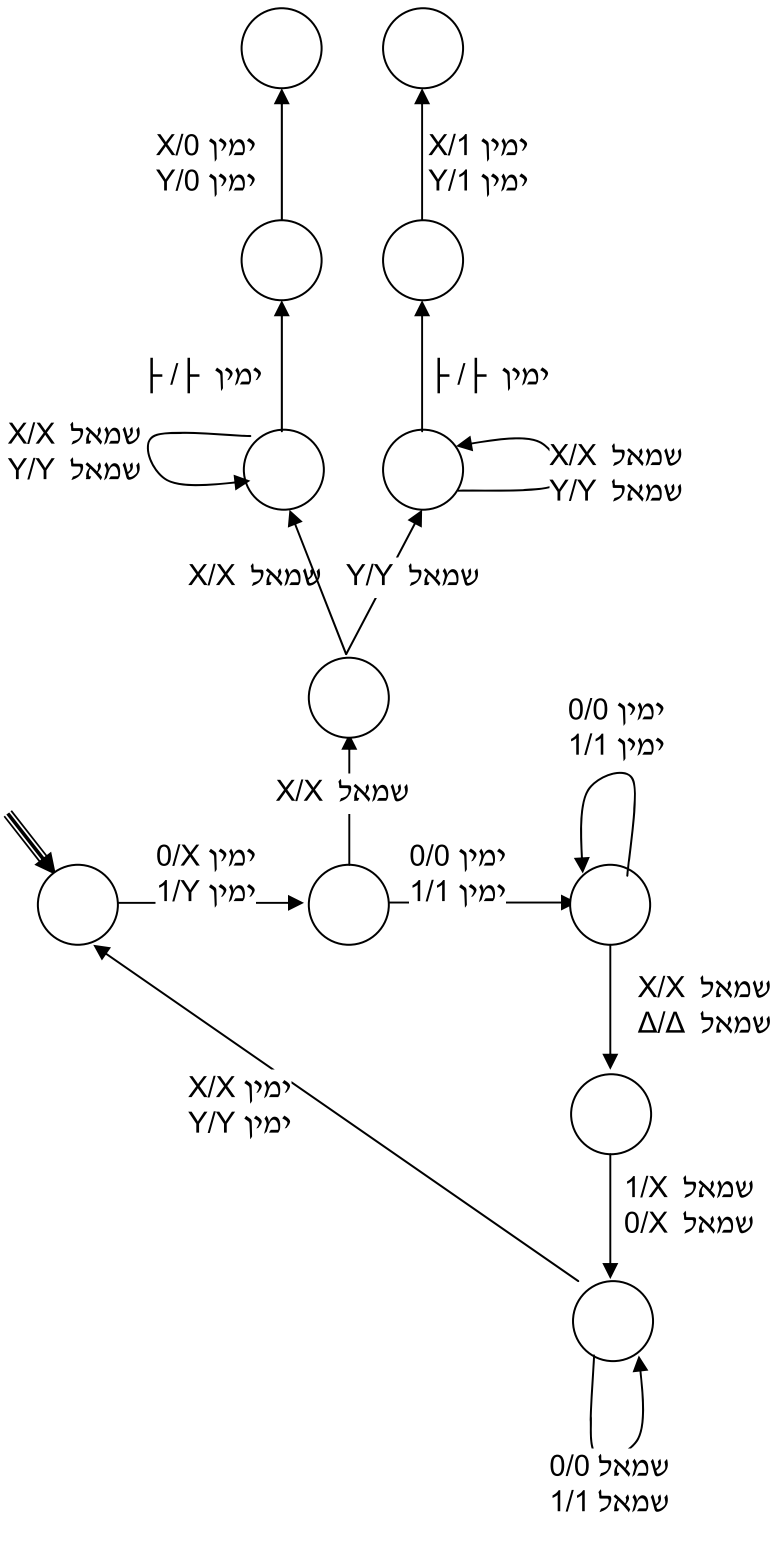
מכונה השמה בסוף הסרט aים כמספר ה aים במילה ולאחריהם bים כמספר ה bים במילה תחומים בסימן דולר



מכונה השמה בסוף הסרט bים כמספר ה aים במילה ולאחריהם aים כמספר ה bים במילה תחומים בסימן דולר(דומה למכונה שמעליה)



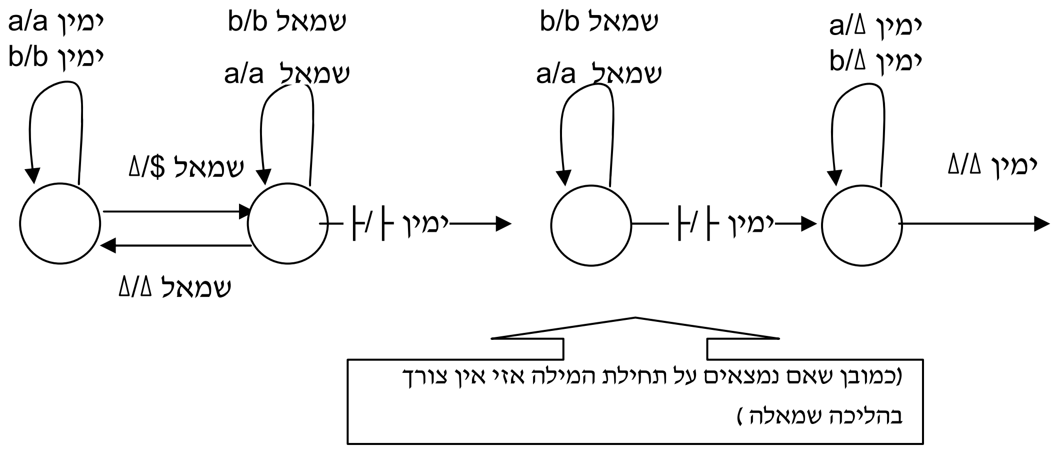
מה מבצעת המכונה הבאה



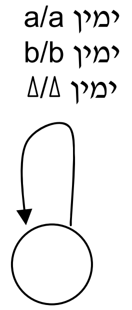
תבניות במכונת טיורינג

מחיקה מילה

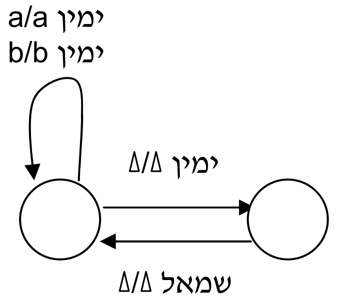
הוספת דולר בסוף מילה



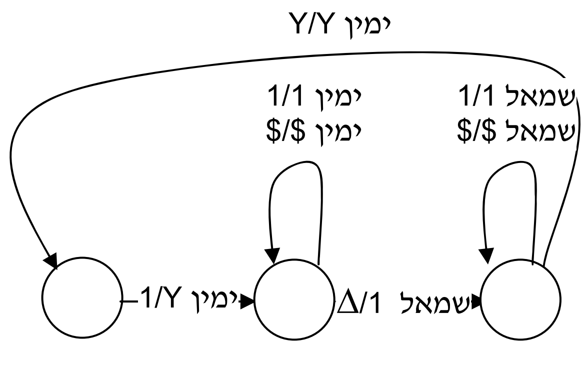
"הליכה לא עוצרת" (הליכה לאינסוף)



"הליכה לא עוצרת" (נעה סביב רווח ראשון)



על כל 1 עד הסימן $ הפיכה ל Y והוספת 1 בסוף



סיכום ודגשים כלליים למניעת טעויות.

אס״ד
* בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי
* אוטומט לא מלא
* אוטומט לא דטרמיניסטי
* שקילות אס״ד,אוטומט לא מלא ואוטומט לא דטרמיניסטי
שפה שניתן לבנות לה אס״ד נקראת שפה רגולרית.
* סגירות שפות רגולריות – סוגים שונים של תרגילים.

אוטומט מחסנית
* שפה שניתן לבנות לה אוטומט מחסנית הינה חופשית הקשר.
* כל שפה רגולרית הינה גם חופשית הקשר.
כוחו של אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי רב יותר מכוחו של אוטומט מחסנית דטרמיניסטי.

$n,m\geq0$ a^nb^m אין פירושו ש n צריך להיות שונה מ m

סוגי שאלות (לא מלא)

1. שפה רגולרית
   1.1. אוטומט סופי דטרמיניסטי
   1.2. אוטומט לא מלא
   1.3. אוטומט לא דטרמיניסטי
   1.4. סגירות שפות רגולריות
   1.5. ציור אוטומט/תאור אוטומט בעזרת טבלה
   1.6. מה עושה אוטומט נתון
   1.7. שקילות אוטומטים
   1.8. אוטומט מכפלה ככלי לפירוק בעיה לתתי בעיות והוכחת סגירות חיתוך ומשלים
2. שפה חופשית הקשר
   2.1. אוטומט מחסנית
   2.2. אוטומט מחסנית לא דטרמיניסטי
   2.3. מה עושה אוטומט מחסנית נתון
   2.4. סגירות שפות חופשיות הקשר
3. מכונת טיורינג
   3.1. בנית מכונה לבדיקת תקינות שפה
   3.2. מכונה המבצעת פונקציה
   3.3. מה עושה מכונת טיורינג נתונה

בגרויות

מהבגרויות הושמטו החלקים שאינם שייכים לתוכנית הלימודים החדשה

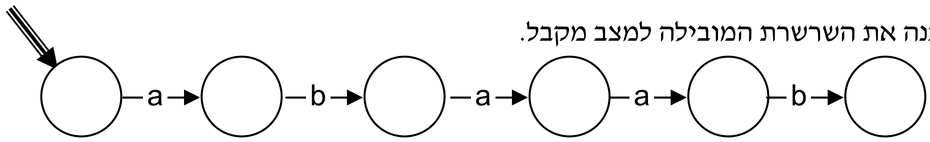
תשמ"ז

תאר באמצעות גרף וטבלה אוטומט סופי דטרמיניסטי שיקבל את כל המחרוזות מעל לא״ב (a,b,c) המקיימות את שני התנאים הבאים:

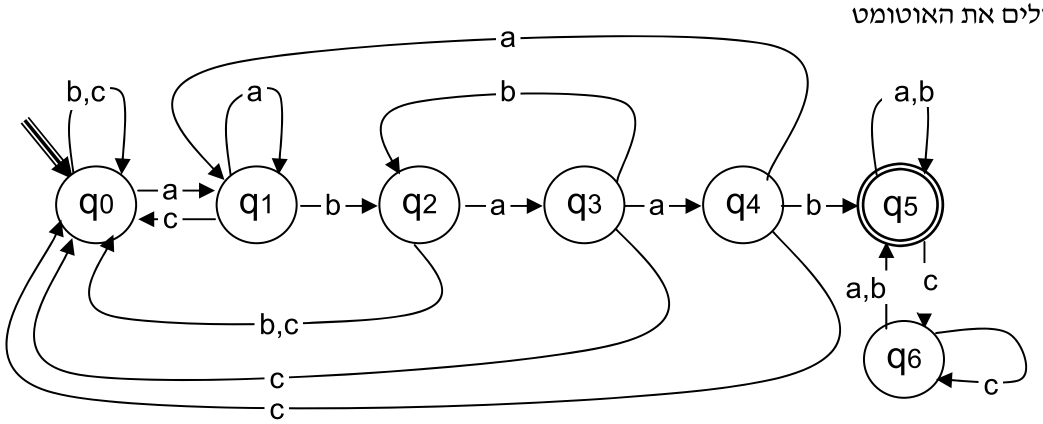
- מופיע בהן abaab כתת מחרוזת.
- הן אינן מסתיימות ב c.

לדוגמא: acabaabcab תתקבל abaabc aaaacb לא תתקבלנה

תחילה נבנה את השרשרת המובילה למצב מקבל.



נשלים את האוטומט



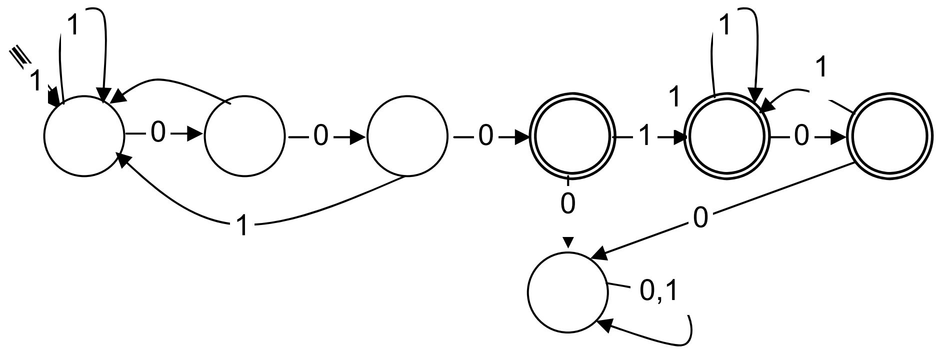
את טבלה עליך לרשום.

תשמ"ח

תאר באמצעות גרף אוטומט סופי דטרמיניסטי שיקבל את כל המחרוזות מעל לא״ב {0,1} המקיימת את שני התנאים :

- מופיעה בהן 000 כתת מחרוזת בדיוק פעם אחת.
- אין בהן כלל מופעים של 00 פרט לאלה שבמופע של 000.
- דגמה : המחרוזות 0110100011101 ו 000111101 תתקבלנה
  המחרוזות 0101011 ו 100011001 לא תתקבלנה

פתרון



תשמ"ח

M1	0	1	0	1
S0	S2	S2	1	0
S1	S2	S2	0	0
S2	S0	S0	1	0
S3	S0	S0	0	0
S4	S1	S1	0	0

M1	0	1	0	1
S0	S2	S2	1	0
S1	S2	S2	0	0
S2	S0	S0	1	0

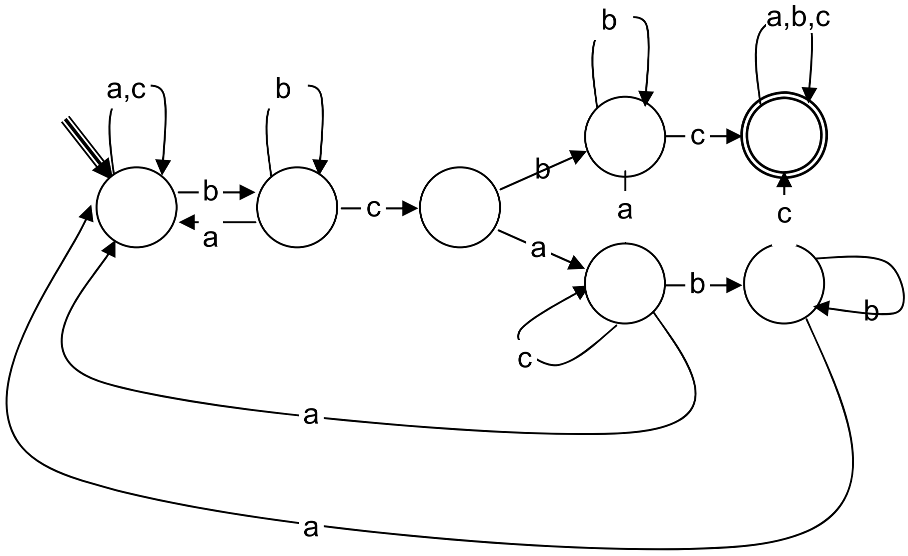
א. שרטט גרף מצבים של האוטומטים M1 M2 . האם יש קשר מיוחד בין שני האוטומטים.? הסבר.

תשמ"ט

תאר באמצעות גרף אוטומט סופי דטרמיניסטי שיקבל את כל המחרוזות מעל ל א״ב {a,b,c}
המקיימות את התנאי הבא :

יש במחרוזת 2 מופעים עוקבים של bc שביניהם אין יותר ממופע אחד של a דוגמה : bccbcacabbca

cabbcacabcabc מתקבלים babcaabbacbcc abcacabcabaabc לא תתקבלנה

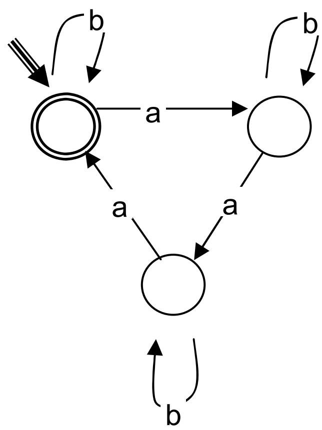


תשן

א. תאר במילים את השפה המוגדרת על ידי האוטומט הבא :

	a	b
S0 מקבל	S0	S1
S1 מקבל	S0	S1
S2	S2	S2

תשנב

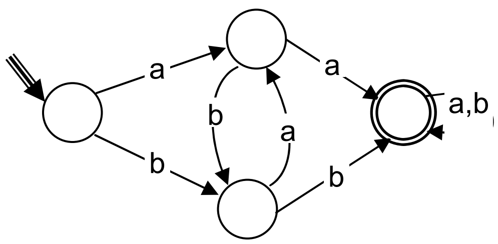


א. תאר במילים מהי השפה המתקבלת על ידי האוטומט הבא :

ב. רשום אוטומט סופי דטרמיניסטי, שיקבל את כל המחרוזות מעל ה א״ב { a,b } המכילות aa או bb

פתרון

א. המילים המתקבלות : כל המילים שמספר a ים שארית 3 שווה 0.

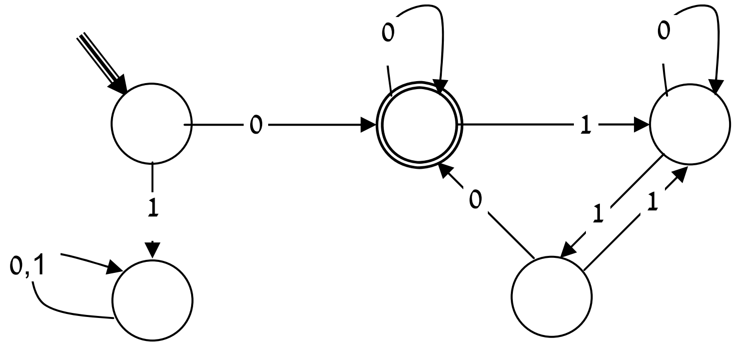


תשנג

א. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי, המקבל את אוסף המחרוזות מעל {0,1} המתחילות ומסתיימות ב 0 ומכילות מספר זוגי של 1 ים. (0 פעמים הוא מספר זוגי).

פתרון

א. האוטומט

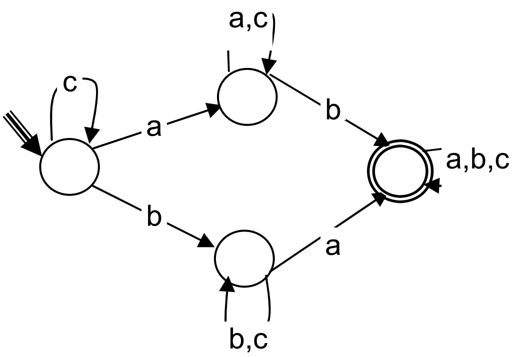


תשנד

א. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את אוסף כל המילים מעל ה א״ב{a,b,c} שבהן מופיע גם a וגם b .

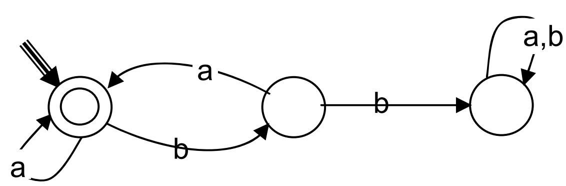
פתרון

האוטומט



תשנה

את כל המחרוזות מעל {a,b} ניתן לחלק לשתי קבוצות זרות זו לזו שתיקראנה ״שפה א״ ו ״שפה ב״. לפניך אוטומט שמקבל את ״שפה א״



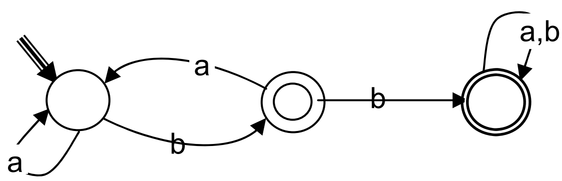
א. תאר מילולית מהי ״שפה א״.

ב. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את ״שפה ב״

פתרון

א. השפה מקבלת כל מילה שאין בה 2 bים ברצף ומסתיימת ב a.

ב. מצב מקבל הופך ללא מקבל ולהפך.

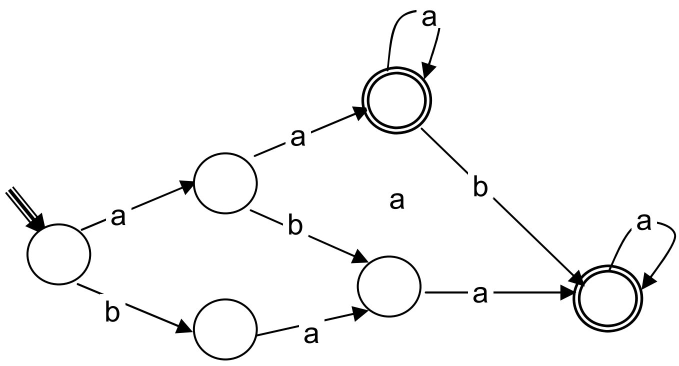


תשנ"ט 22

א. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי, המקבל את אוסף המילים מעל הא״ב $\{a,b\}$ ובהן לפחות שני a ולכל היותר b אחד.

פתרון

א. האוטומט הלא מלא:



ש"ס 24

האם השפה שלפניך היא רגולרית? הוכח

$L=\{a^i b^j c^k$ | k היא השארית המתקבלת מחלוקת i בשלוש $i,j,k \geq 0\}$

תש"ס 25

האם השפה שלפניך חופשית הקשר? הוכח

$L=\{a^i b^j c^{i/2}$ | i זוגי j אי זוגי $i,j \geq 1\}$

תש"ס 26

M אוטומט סופי דטרמיניסטי לא מלא. נסמן ב L את השפה המתקבלת על ידי M. נבנה אוטומט M' מתוך M באופן הזה: האוטומט M' יהיה זהה לאוטומט M אבל כל מצב שהוא מצב מקבל של M יהפוך למצב שאינו מקבל ב M' וכל מצב שאינו מקבל ב M יהפוך למצב מקבל ב M'.

נסמן ב L' את השפה המתקבלת על ידי M'.

א. האם L' מוכל שווה למשלים של L? נמק.

ב. האם משלים של L מוכל שווה ל L' ? נמק.

ג. האם L' שווה L? נמק.

תש"ס 27

M מכונת טיורינג. א״ב הקלט הוא {a,b}. א״ב המכונה הוא Ø. קבוצת המצבים הינה {q0,q1,q2}.
המצב ההתחלתי הינו q0. קבוצת המצבים המקבלים הינה {q2}.
קבוצת המעברים הינה:

{q0,a,q0,a,ימין}
{q0,b,q0,b,ימין}
{q0,Δ,q1,Δ,שמאל}
{q1,a,q1,Δ,שמאל}
{q1,b,q1,b,ימין}
{q1, Δ,q0, Δ,שמאל }
{q1, ├,q2, ├,ימין }

א. לפניך שתי מילים: abbaa aaaa
קבע עבור כל מילה אם היא מתקבלת על ידי המכונה M?
א. מהי השפה המתקבלת על ידי המכונה M?
ב. האם המכונה עוצרת לכל מילת קלט? אם כן – נמק, אם לא-בנה מכונת טיורינג שתעצור לכל קלט ותקבל אותה השפה.

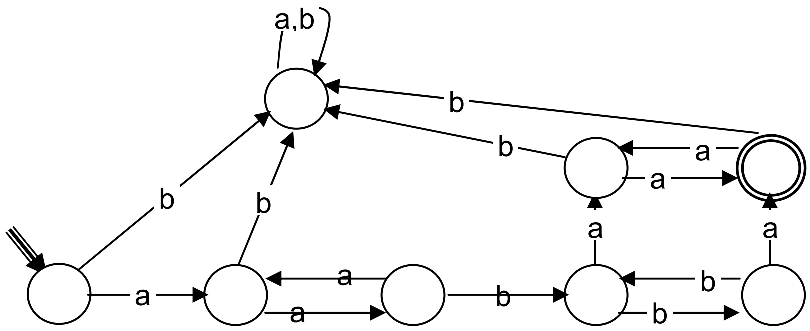
תשס"א 11

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי עבור השפה L מעל הא״ב {a,b}

$$L=\{a^ib^ja^k \mid i,j,k>0,\ i \% 2 =0,\ (j+k) \% 2=1\}$$

פתרון

האוטומט:



תשס"א 13

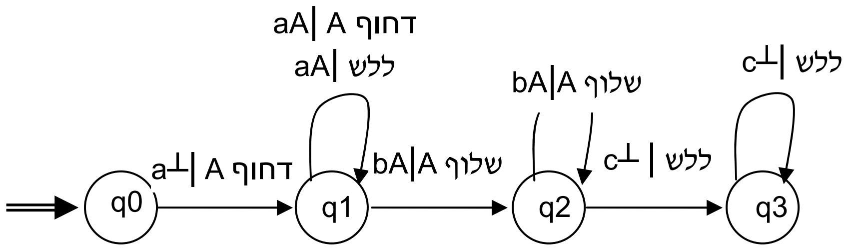
לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c}

$L= \{ a^{n+k}b^nc^f \mid 0< n,k,f \}$

הוכח שהשפה L חופשית הקשר.

פתרון

על מנת להוכיח שהשפה חופשית הקשר צריך לבנות לה אוטומט מחסנית או לפרק אותה לשפות ולהראות בניה שלה על פי החוקים. אנו פשוט נבנה אוטומט מחסנית רק שהוא לא יהיה דטרמיניסטי.



במצב q1 על האות a ובתוך המחסנית a ניתן לבחור בין להוסיף A או שלא.

תשס"א 14

קבע לכל אחת מהשפות אם היא רגולרית או לא רגולרית :

L1= { WcXcR(W) | W ו X מילים מעל הא״ב {a} }

L2= { WcXcR(W) | W ו X מילים מעל הא״ב {a,b} }

L3= { WR(W)cXR(X) | W ו X מילים מעל הא״ב {a} }

L4= { WR(W)cXR(X) | W ו X מילים מעל הא״ב {a,b} }

L5= { WcR(W)cW | W ו X מילים מעל הא״ב {a} }

א. העתק את שמות השפות L1 עד L5 למחברתך ורשום ליד כל שפה האם היא רגולרית, חופשית הקשר ולא רגולרית, אינה חופשית הקשר.

ב. מבין שפות אלה בחר אחת שהיא חופשית הקשר ולא רגולרית והוכח שהשפה בחרת חופשית הקשר. אם יש יותר משפה אחת כזו בחר באחת מהן כרצונך.

תשס"א 15

התבונן בשפות שלפניך :

$L1 = \{a^n b^m \mid n,m \geq 0$

k היא השארית המתקבלת מחלוקת n ב 3,

t היא השארית המתקבלת מחלוקת m ב 3,

k>t }

$L2 = \{a^n b^m a^n \mid n,m \geq 0$

k היא השארית המתקבלת מחלוקת n ב 3,

t היא השארית המתקבלת מחלוקת m ב 3,

k=t }

$L3 = \{a^n b^m \mid m \geq n \quad n,m \geq 0$

k היא השארית המתקבלת מחלוקת n ב 3,

t היא השארית המתקבלת מחלוקת m ב 3,

k=t }

$L4 = \{a^n b^m a^n \mid n,m \geq 0$ n אי זוגי   m זוגי}

ג. העתק את שמות השפות L1 עד L4 למחברתך ורשום ליד כל שפה האם היא רגולרית או אינה רגולרי.

ד. מבין שפות אלה בחר אחת שאינה רגולרית והוכח שאינה רגולרית. אם יש יותר משפה אחת כזו בחר באחת מהן כרצונך.

תשס"א 16

נתונה השפה L מעל הא״ב {a,b}

$L= \{ a^i b^j a^k \mid 0< i,j$, אי זוגי $j+k$ זוגי i }

הוכח שהשפה L רגולרית בהסתמך על כך שהשפות L1-L6 רגולריות

$L1= \{ a^i \mid 0< i \}$

$L2= \{ b^i \mid 0< i \}$

L3= { w | w מכילה מספר זוגי של אותיות a ומספר זוגי של אותיות b }

L4= { w | w מכילה מספר אי-זוגי של אותיות a ומספר אי-זוגי של אותיות b }

L5= { w | w מכילה מספר זוגי של אותיות a ומספר אי-זוגי של אותיות b }

L6= { w | w מכילה מספר אי-זוגי של אותיות a ומספר זוגי של אותיות b }

אין חובה להשתמש בכל השפות האלה אך אין להשתמש בשפות שאינן מוזכרות.

הפתרון

$$L= \{ (L1 \cap L3) * \big(((L2*L1) \cap (L3 \cup L6)\big) \quad \}$$

תשס"ב 13

לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c}

$L= \{ a^m b^n c^k \mid 0<m , m<n , k=n-m$, מתחלק ב 3 ללא שארית k }

הוכח שהשפה L הינה חופשית הקשר(בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L).

פתרון (חלקי-השלם)

נתון $k=n-m$ נעביר אגף ונקבל $m+k=n$ נציב ונקבל

$$L= a^m b^{m+k} c^k = a^m b^m b^k c^k$$

$m<n$ גורר שקיים לפחות c אחד שאז מספר ה bים יהיה גדול ממספר ה aים.

$0 < m$ גורר שקיים לפחות a אחד .

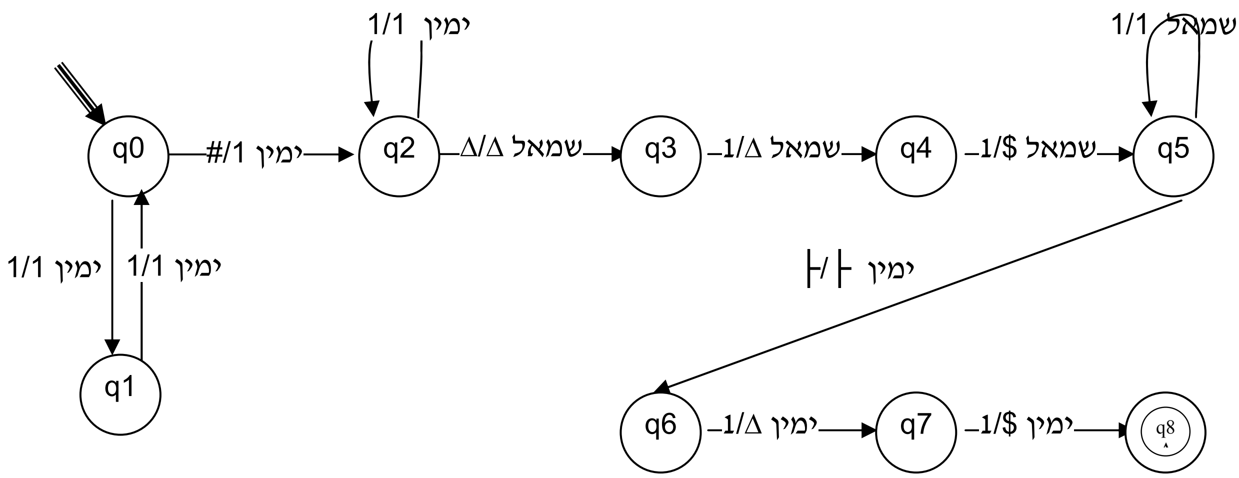
תשס"ב 14

לפניך מכונת טיורינג. המכונה מקבלת כנתונים שני מספרים אי-שליליים(יתכן 0) הכתובים באונארית בהתאם לשיטת הרישום המקובלת.

ה. מה יכיל הסרט לאחר מעבר על קלט של שני המספרים 2 ואחריו 3? הראה מעקב אחר סרט המכונה עד עצירתה.

ו. מהי הפונקציה שהמכונה מחשבת? הסבר.

ז. האם המכונה מחשבת את הפונקציה עבור כל קלט של זוג מספרים אי-שליליים(יתכן 0)? נמק.



תשס"ב 15

נתונות שתי השפות T,L מעל הא"ב {a,b}.

L אוסף המילים המתחילות באות a.

T אוסף המילים המתחילות ומסתיימות באותה אות כולל המילה הריקה.

לפניך שלוש טענות. קבע לגבי כל אחת מהן אם היא נכונה או שלא ונמק.

1. $ababaab \in (T \bullet \bar{T}) \cap L$ כן שרשור המילה הריקה (שייך ל T) ל מילה שלנו ששייכת ל $\bar{T}$ וגם מתחילה ב a

.

2. $T = T \bullet T$ לא כי שרשור aa עם bb נותן מילה שלא מתחילמ ומסתיימת באותה האות.

3. R(L) ≥ (L⋂T)

תשס"ב 16

נתונות ארבע השפות L1-L4

$L1= \{ c^n b^{n+1} \mid n\geq 0 \}$

$L2= \{ c^n b^{n+1} \mid n\geq 0$, 2 שארית החלוקה של n בשלוש שווה $\}$

$L3= \{ c^n b^{n+1} \mid n\geq 0$, 2 שארית החלוקה של n בשלוש שונה מ $\}$

$L4= \{$ מילים מעל הא"ב {a,b,#} המתחילות ומסתיימות ב # $\}$

נגדיר את שלוש השפות הבאות L5,L6,L7 :

1. $L5= L2\cap L3$
2. $L6= L_4{}^2$
3. $L7= L1^*L2$

עבור כל אחת מהשפות ענה על שני הסעיפים א' ו ב'.

א. הצג את השפה הפשוטה ביותר האפשרית.

ב. קבע אם השפה "רגולרית" או "חופשית הקשר" ולא רגולרית או "אינה חופשית הקשר" ונמק את תשובתך.

פתרון

1. רגולרית.
2. רגולרית.
3. חופשית הקשר.

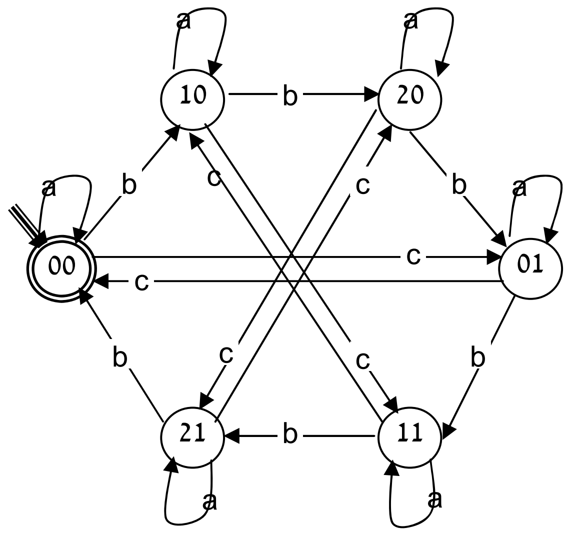
תשס"ג 11

L= { לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c}
אוסף כל המילים שבהן המספר הכולל של אותיות b במילה מתחלק ב 3 בלי שארית,
וגם המספר הכולל של אותיות c מתחלק ב 2 ללא שארית. }

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי שיקבל את השפה L .

פתרון

האוטומט :



תשס"ג 12

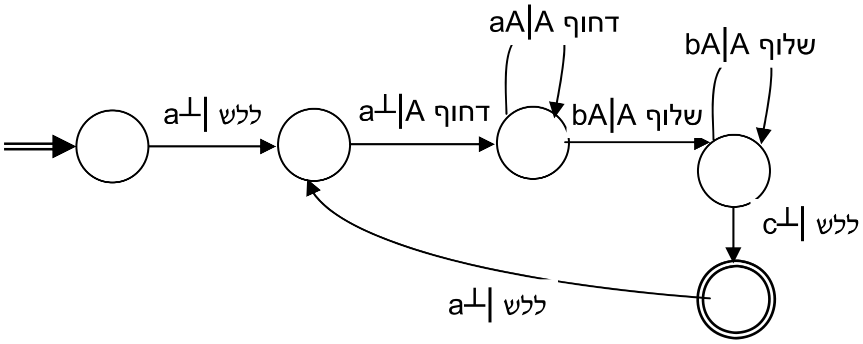
לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c}

השפה L כוללת מילים הבנויות מרצף של תת-מילים במבנה : $a^m b^{m-1} c$ כאשר $m \geq 2$.

מילה בשפה L יכולה לכלול תת-מילים שהm בהן שונה . המילה הריקה אינה כלולה בשפה.

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L .

פתרון



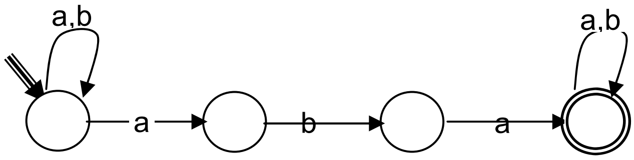
תשס"ג 13

לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b}

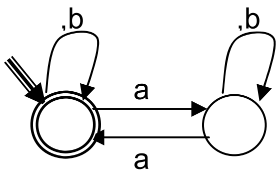
אוסף כל המילים שבהן מספר ה a ים מתחלק ב 2 ללא שארית וגם הרצף aba מופיע במילה.

הוכח שהשפה רגולרית.

L1



L2



L1 שפה המכילה aba רגולרית (בנינו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי)

L2 שפה שבה מספר ה a ים זוגי. (בנינו אוטומט סופי דטרמיניסטי)

השפה המבוקשת L הינה חיתוך של L1 ו L2 ומחוקי הסגירות נובע שגם היא רגולרית.

תשס"ג 14

לפניך השפה L מעל הא״ב $\{a,b,c\}$.

השפה L כוללת מילים הבנויות מרצף של תת מילים במבנה $a^n b^{n-1} c$ כאשר $m\geq 2$. מילה בשפה L יכולה לכלול תת מילים שה m בהן שונה. המילה הריקה אינה כלולה בשפה.

דוגמאות של מילים בשפה aaaaabbbbc aaaabbbcaabc aabcaabcaabc

הוכח שהשפה הינה חופשית הקשר.

תשס"ג 15

נתונות חמשת השפות L1-L5

$L1= \{ a^n b^2 a^{2n} \mid n\geq 1 \}$

$L2= \{ a^{2n} b^n a^2 \mid n\geq 1 \}$

$L3= \{ a^{2n} b^2 a^2 \mid n\geq 1 \}$

$L4= \{ a^n b^{2n} a^n \mid n\geq 1 \}$

$L5= \{ a^2 b^{2n} a^{2m} \mid n,m\geq 1 \}$

א. עבור כל אחת מהשפות קבע אם השפה ״רגולרית״ או ״חופשית הקשר״ ולא רגולרית או ״אינה חופשית הקשר״ ונמק את תשובתך.

ב. מבין השפות קבע אחת שאינה רגולרית והוכח שהיא אינה רגולרית.

תשס"ג 16

נתונות ארבעת השפות L1-L4 מעל הא״ב $\{a,b\}$

L1= { w | אוסף כל המילים בהן מספר ה a ב w זוגי }

L2= { w | אוסף כל המילים בהן מספר ה a ב w אי-זוגי }

$L3= \{ a^n b^m \mid n,m \geq 0 \}$

$L4= \{ b^n a^m \mid n,m \geq 0 \}$

לפניך חמש טענות. קבע לכל אחת מהם אם היא נכונה או לא ונמק את קביעתך.

$aba \in (L1\cap L2)$

L2 = (L1) משלים

$L1\cap L2\cap L3=\{ a^n b^m \mid$ זוגי n,m $n,m \geq 0 \}$

$L3\cap L4=\{\varepsilon\}$

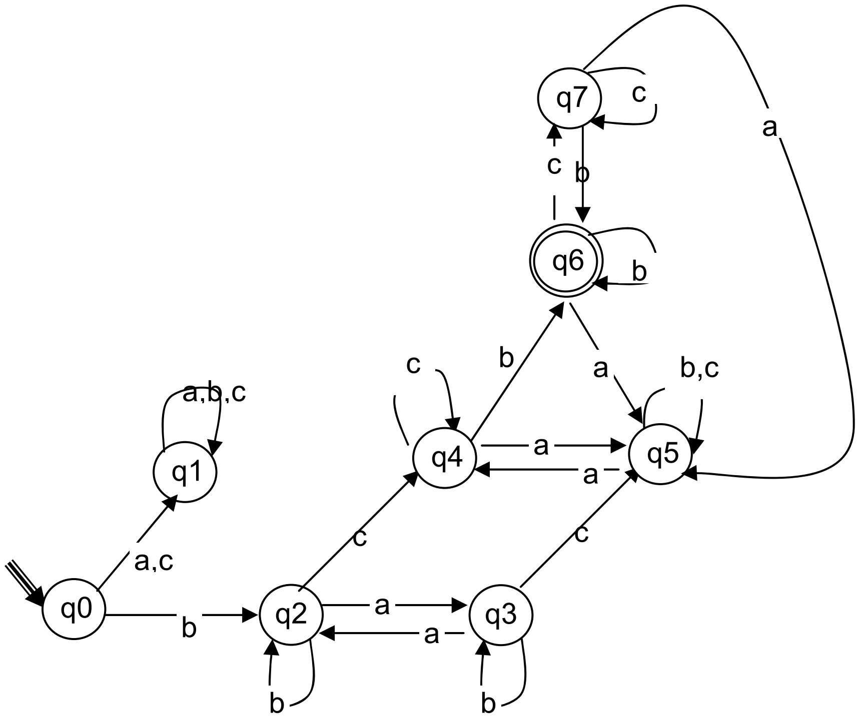
$L3^*L4=\{ a^n b^{n+m} a^m \mid n,m \geq 0 \}$

תשס"ד 13

לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c}

השפה L כוללת מילים המתחילות ב b ומסתיימות ב b מספר ה a ים זוגי ויש להן לפחות c אחד.

בנה אסד מתאים



תשס"ד 14

נגדיר פעולה חדשה על השפות La Lb Lc באופן הזה:

La#(Lb,Lc) היא קבוצת כל המילים הנמצאות ב La אך לא נמצאות Lb וגם לא נמצאות ב Lc.

א. לפניך שלוש שפות L1,L2,L3 מעל הא"ב {a,b}

$L1= \{ a^n b^m a^n \mid n,m > 0 \}$

L2= {מספר אותיות a שונה ממספר אותיות b}

L3= {מספר אותיות b הוא אי-זוגי}

1) תן דוגמה למילה באורך גדול מ 4 השייכת לשפה L1#(L2,L3). הסבר מדוע המילה שייכת לשפה זו.

2) תן מילה באורך 4 לפחות שאינה שייכת לשפה L1#(L2,L3) . הסבר מדוע אינה שייכת לשפה זו.

3) תאר את אוסף המילים בשפה L1#(L2,L3)מעל הא"ב {a,b} .

ב. נתון כי La Lb Lc הן שפות רגולריות.

הוכח שהשפה La#(Lb,Lc) היא רגולרית.

תשס"ד 15

נתונות שלושת השפות L1-L3

$L1= \{ a^n b^n \mid n> 0 \}$

$L2= \{ a^n b^n d a^k b^k \mid n,k \geq 0 \}$

L3= {כל המילים מעל {a,b} המכילות את הרצף ba}

לפניך חמש טענות:

$aaaabbbb \in L1*L1$

$R(L1)*d*R(L1) < R(L2)$

$L1 \cap L2=(L2 \cup L3) \cap \{d\}$

$L1=R(L3) \cap L1$

משלים L3 מוכל ב L1

קבע לכל אחת מהטענות אם היא נכונה או לא ונמק את קביעתך.

תשס"ד 16

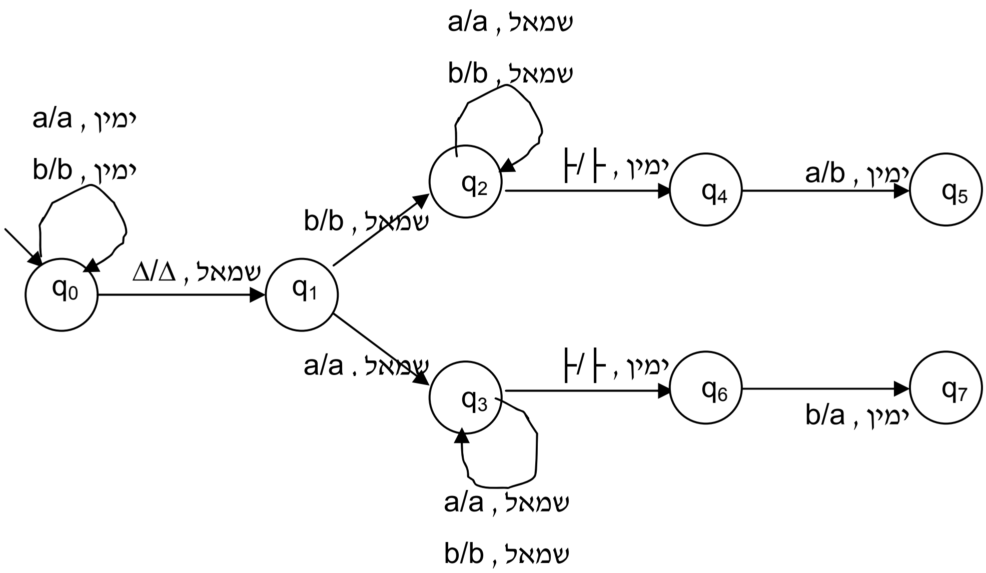
בנה מכונת טיורינג שעל סרט הזיכרון שלה תהיה מילת קלט לא ריקה מעל הא״ב $\{a,b\}$. המכונה תכתוב את האות האחרונה במילה במקום האות הראשונה. כל האותיות האחרות לא ישתנו.

לדוגמה בעבור סרט הזיכרון שלהלן לפני תחילת פעולתה :

├	a	a	b	a	b	Δ	Δ	···

סרט הזיכרון בסוף הפעולה יראה :

├	b	a	b	a	b	Δ	Δ	···

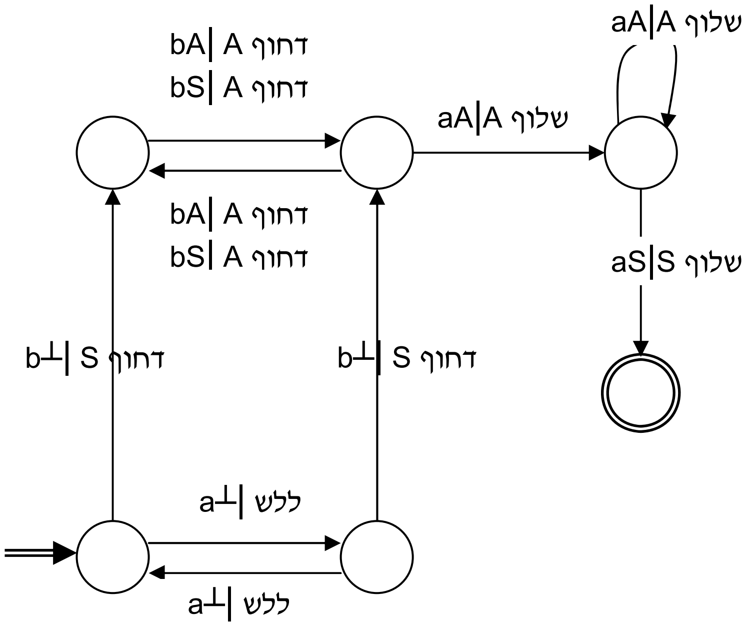


תשס"ה 13

לפניך השפה L מעל הא״ב $\{a,b\}$

$$L= \{a^m b^n a^n \mid n,m>0 \text{ זוגי } m+n\}$$

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L.



תשס"ה 14

בנה מכונת טיורינג שתתקבל כקלט מילה מעל הא״ב $\{a,b,c\}$

המכונה תבדוק אם לפני כל אות a יש c אחד לפחות. אם כן המכונה תעצור במצב מקבל, אם לא המכונה לא תעצור. אם הקלט הוא המילה הריקה המכונה תעצור במצב מקבל.

תשס"ה 15

נתונות שלוש השפות L1-L3

$L1= \{ a^n b^{n+2} \mid n\geq 0 \}$

$L2= \{ a^n b^m \mid n,m\geq 1 \quad \text{זוגי } n \}$

$L3= \{ a^{2n} b^{n+3} \mid n\geq 0 \}$

א. עבור כל אחת מהשפות קבע אם השפה ״רגולרית״ או ״אינה רגולרית״. נמק את קביעותיך.

ב. מהי השפה $L1\cap L2$? נמק.

ג. האם מספר ה b ים במילה שייכת ל $L2*R(L2)$ הוא זוגי? נמק.

ד. קבע לכל אחת מהמילים הבאות אם היא שייכת לשפה $L3\cap$(משלים L1)

w1=aaaabbbbb

w2=bbb

תשס"ה 16

ללימודים במכללה מסוימת מתקבלים תלמידים על פי ציוניהם בבחינות הבגרות.

הקריטריונים לקבלה ללימודים במכללה הם אלה:

תעודת בגרות ובה לפחות 5 מקצועות.

הציונים במתמטיקה

הציונים במתמטיקה אנגלית ומקצוע נוסף צריכים להיות גבוהים מ 83

כל הציונים חייבים להיות גבוהים מ 74.

במכללה מקודדים את הציונים באופן הבא:

A: 100-95

B: 94-85

C: 84-75

D: 74-55

האותיות המיצגות את הציונים מוקלדות כמחרוזת משמאל לימין באופן הזה:

האות הראשונה שמוקלדת מייצגת ציון במתמטיקה.

האות השנייה שמוקלדת מייצגת ציון באנגלית.

לאחר מכן מוקלדות האותיות המייצגות את שאר הציונים.

א. לפניך 5 מחרוזות. קבע לכל אחת אם התלמיד יתקבל או לא יתקבל ללימודים במכללה. נמק את קביעותיך.

a. AACCCCBBCA

b. ABABDBB

c. BBBBBBA

d. AAAA

e. AACCCC

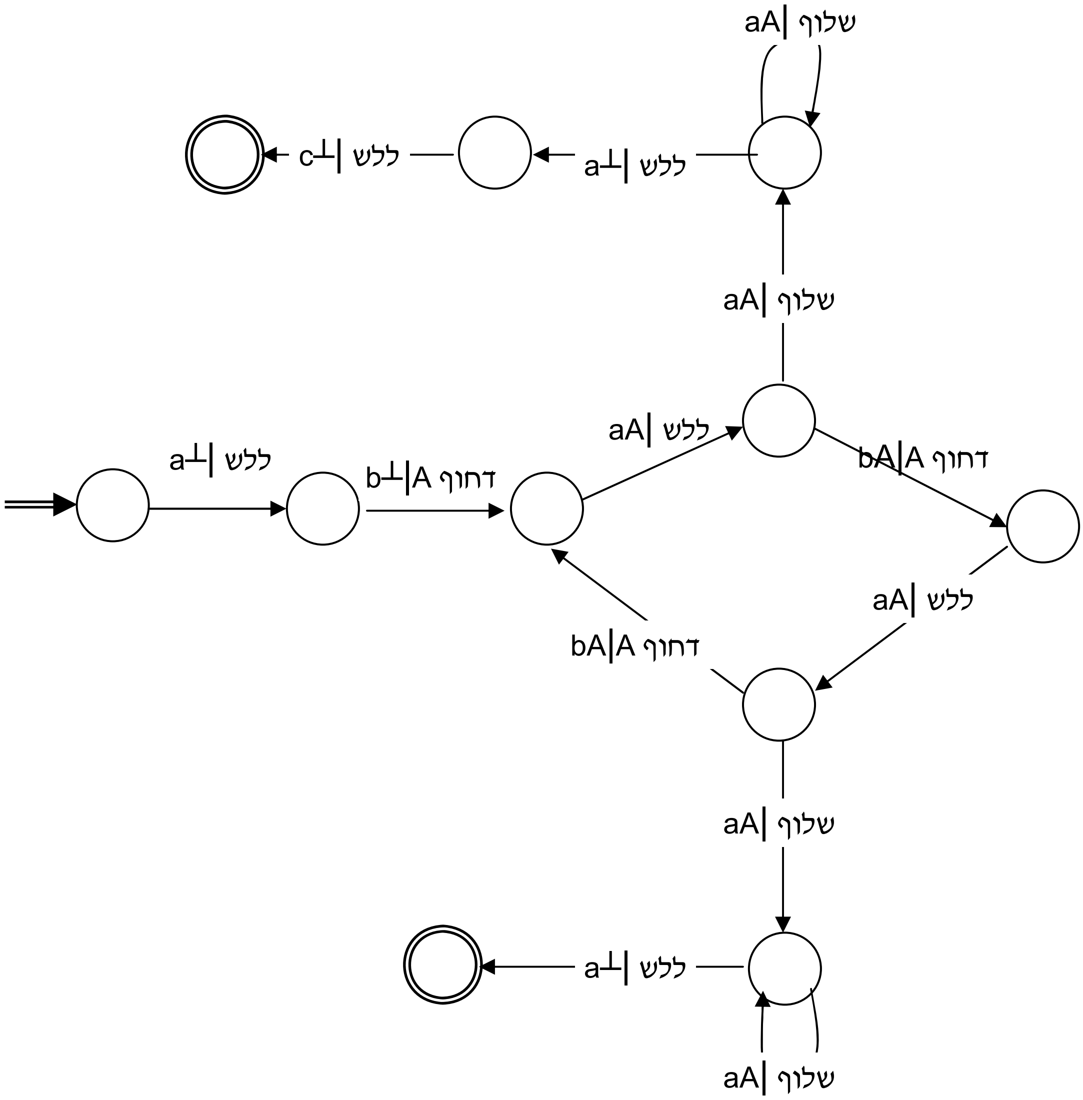
ב. בנה אס"ד מתאים.

תשס"ו 13

לפניך השפה L מעל הא״ב $\{a,b,c\}$

$L= \{(ab)^n a^{n+2} c^k | n>0$ היא השארית מחלוקת n ב 2 $k\}$

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L



תשס"ו 14

לפניך ארבעת השפות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$L_1=\{a^ib^k | i,k\geq 0$ מתחלק בשלוש ללא שארית $i+k$ $\}$

$L_2=\{a^ib^ka^i | i,k\geq 0$ השארית המתקבלת בחלוקת k בשלוש i $\}$

$L_3=\{a^ib^k | i,k\geq 0$ מתחלק בשלוש ללא שארית, k מתחלק בשלוש ללא שארית i $\}$

$L_4=\{a^ib^{3i}a^k | i,k\geq 0$ מתחלק בשלוש ללא שארית k $\}$

א. לכל אחת מהמילים הבאות קבע לאיזו שפה או שפות היא משתייכת?
נמק קביעותיך.

a. w1=aaa

b. w2=abbbaaa

ב. לכל אחת מהשפות L1 עד L4 קבע באם היא רגולרית? נמק קביעותיך.

פתרון

א. W1 משתייכת לשפות L4(i=0) L3(k=0 i=3) L1(i=3 k=0)

W2 משתייכת לשפות L4

תשס"ו 15

לפניך השפות L_1 L_2 L_3 מעל הא״ב $\{a,b,c\}$

$L_1=\{c^ib^ka^k | i,k\geq 0\}$

$L_2=\{w*R(w)$ $\{a,b,c\}$ מילה מעל הא״ב w $\}$

$L_3=\{a^ib^ic^k || i,k\geq 0\}$

א. בעבור כל אחת מהשפות הבאות

1) $L_1\cap L_3$

2) $L_2\cap L_3$

רשום מילה לא ריקה השייכת לשפה שהאורך שלה הוא הקצר ביותר.
הסבר מדוע היא שייכת לשפה ומדוע היא המילה הלא ריקה הקצרה ביותר.

ב. מהי השפה $(L_1*L_3)\cap L_2$. נמק.

ג. לכל אחד מסעיפים הבאים קבע אם הוא נכון או לא נכון. נמק את קביעותיך.

1) $R(L_2)=L_2$

2) $R(L_1)=L_3$

תשס"ו 16

מכונת הגרלות מגרילה בכל פעם ספרה אחת מבין הספרות 0,1,2 .

רצף הגרלות חוקי מקיים את שלושת התנאים הבאים :

הוגרלה לפחות ספרה אחת.

מספר ספרות ה 0 שהוגרלו + מספר ספרות ה 1 שהוגרלו הוא זוגי.

אם הוגרלה הספרה 2 היא לא הוגרלה מיד לאחר ספרה 2 .

דוגמה לרצפים חוקיים : 1112111 , 1010 , 021211020

דוגמה לרצפים לא חוקיים : 111 , 01010 , 02211020

בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי שיבדוק אם רצף הגרלות הוא חוקי.

תשס"ז 13

בעבור כל אות בא״ב $\{0,1\}$ נגדיר פעולת ״ניגוד״ שמסומנת באופן הבא:

$\tilde{0} = 1 \quad \tilde{1} = 0$

הניגוד של מילה ריקה הינה מילה ריקה.

הניגוד של מילה כלשהי הינה הפיכת 0 ל 1 ו 1 ל 0 .

דוגמה: אם w שווה 10010 אזי הניגוד שלה הינו: 01101

בעבור שפה כלשהי L מעל $\{0,1\}$ נגדיר את השפות L3 L2 L1 באופן הבא:

$$L1 = \{ \sim w \mid w \in L\}$$

$$L2 = \{ R(w) \mid w \in L\}$$

$$L3 = \{w*R(w) \mid w \in L\}$$

1) בעבור כל אחת משהפות הבאות רשום את השפות המתאימות L3 L2 L1

$$L= \{0^n \mid n\geq 0\}$$

$L= \{0w0 \mid$ w מילה מעל הא״ב $\{0,1\}\}$

$$L= \{0^n (01)^k \mid n,k\geq 0 \}$$

2)

a. רשום שפה לא ריקה L שבעבורה מתקיים L1=L

b. רשום שפה לא ריקה L שבעבורה מתקיים L1=L2 וגם L≠L1

תשס"ז 14

לפניך חמשת השפות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$$L_1= \{ab^n \mid n\geq 0\}$$

$$L_2= \{a^n b^m \mid n,m\geq 0 \ n\neq m\}$$

$$L_3= \{b^m a^n b^m \mid n,m\geq 0\}$$

$$L_4= \{ab^n b^m a \mid n,m\geq 0 \ n\neq m\}$$

$$L_5= \{ab^n b^m a \mid n,m>0 \ n>m\}$$

ג. רשום מילה שנמצאת ב L1*R(L1) ולא נמצאת ב L5 . נמק תשובתך.

ד. רשום מילה הנמצאת בשפה L4 ולא נמצאת בשפה L5 . נמק תשובתך.

ה. רשום מילה שנמצאת ב L2*R(L2) ולא נמצאת ב L5 . נמק תשובתך.

ו. רשום מילה שנמצאת ב L3 ולא נמצאת בשפה L2*R(L2). נמק תשובתך.

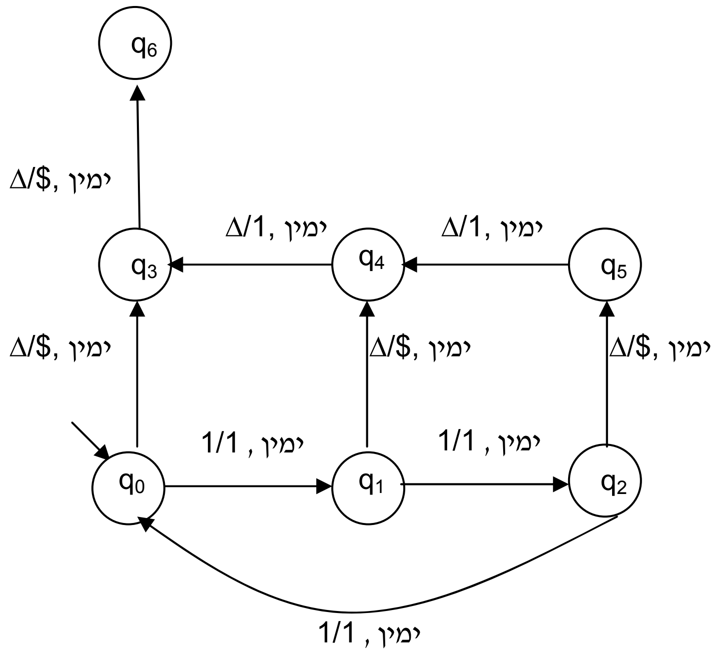
ז. האם L5 שווה R(L5) . נמק תשובתך.

תשס"ז 15

בנה מכונת טיורינג שתחשב את הפונקציה שלפניך :

F(x) = { x≥0 , שארית החלוקה של x בשלוש }

המכונה תקלוט מספר אונרי הרשום על הסרט על ידי x תווים של 1 ותרשום על הסרט כפלט ותרשום על הסרט כפלט את הערך המחושב על ידי הפונקציה כמספר אונרי המופיע בין שני סימני $. הפלט יכול להיכתב בכל מקום על פני הסרט.



תשס"ז 16

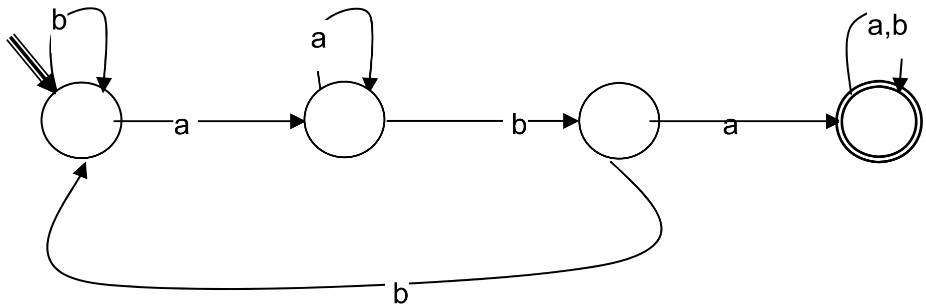
1) בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל הא״ב {a,b} המקבל את כל המילים שיש בהן הרצף aba .

2) בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל הא״ב {a,b} המקבל את כל המילים שאין בהן הרצף bab .

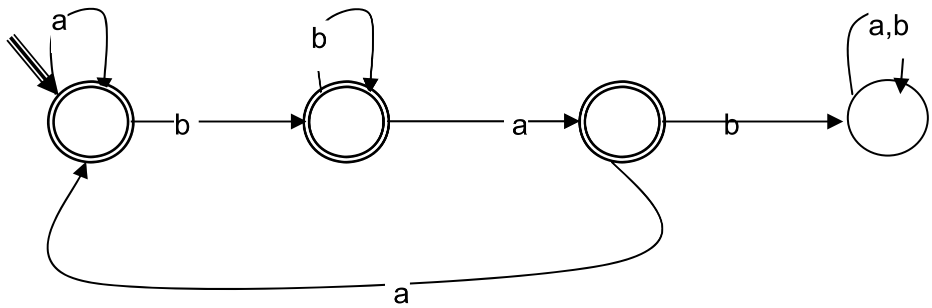
3) בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל הא״ב {a,b} המקבל את כל המילים שיש בהן הרצף aba ואין בהן הרצף bab .

פתרון

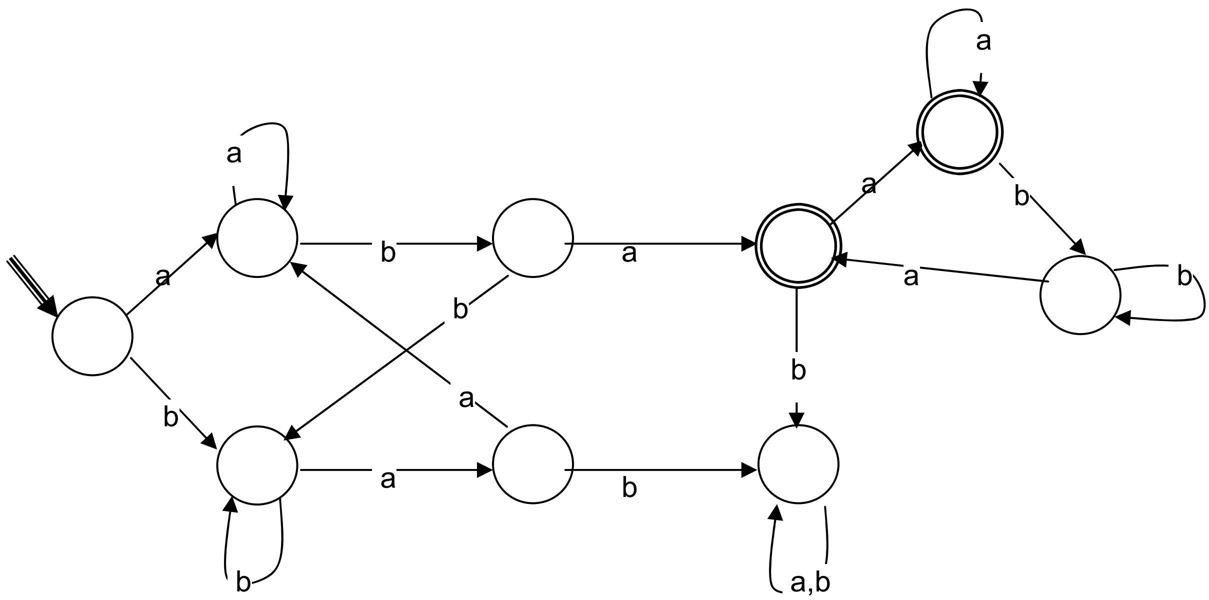
מופיע aba



לא מופיע bab



מופיע aba וגם לא מופיע bab

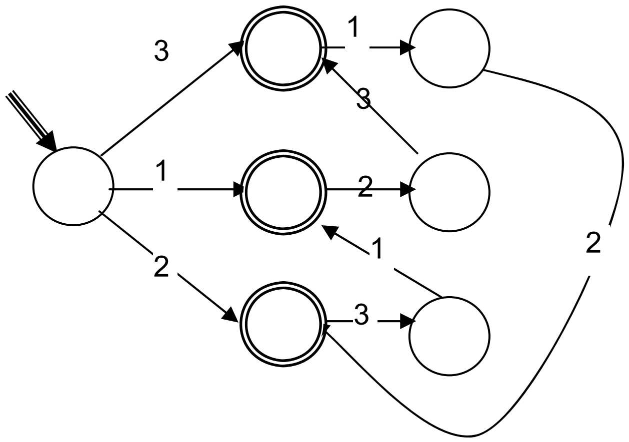


תשס"ח 13

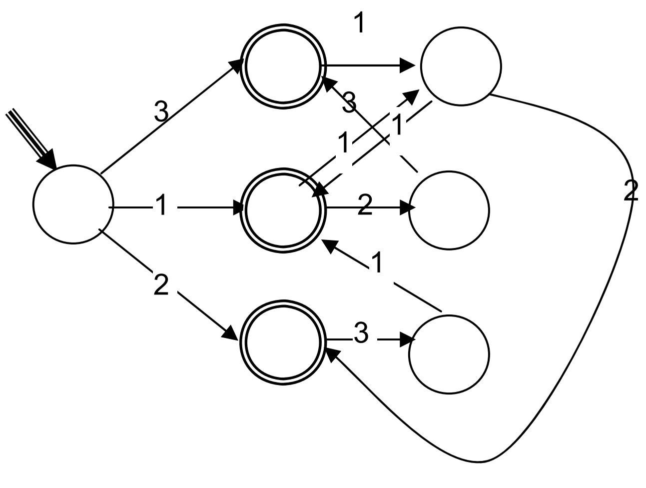
נתונה מחרוזת אינסופית ....3123123123123...

א. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל הא"ב {1,2,3} המקבל את כל המילים באורך אי-זוגי שכל אחת מהן היא תת-מחרוזת של המחרוזת הנתונה.
למשל : 123 23123 יתקבלו. המילים: 2312 212 לא יתקבלו.

ב. בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל הא"ב {1,2,3} המקבל את כל המילים שהן באורך אי-זוגי וסדר הספרות בהן הוא כמו הסדר במחרוזת הנתונה אך הספרה 1 יכולה לחזור כמה פעמים ברצף.
לדוגמה : 31123 31231 3112311 יתקבלו.



פתרון א



פתרון ב

תשס"ח 14

בעבור אות k ומילה w הסימון $\#_k(w)$ הוא מספר המופעים של האות k במילה w .

לפניך השפות L1-L5 מעל הא״ב {0,1}

$L1= \{w \mid |w| >5\}$

$L2= \{w \mid \#_1(w) <5\}$

$L3= \{w \mid \#_1(w)=5 , \#_0(w)=5\}$

$L4= \{w \mid \#_1(w) = \#_0(w)\}$

$L5= \{w \mid w=xxy \quad 0<|x|<5$ y,x מילים לא ריקות מעל {0,1} }

א. רשום מילה השייכת ל L4 ולא שייכת לשפה L3 . נמק תשובתך. 01

ב. רשום מילה השייכת ל L1 ולא שייכת לשפה L2 . נמק תשובתך. 111111

ג. רשום מילה השייכת ל L5 ולא שייכת לשפה L2 . נמק תשובתך. 1110111011

ד. הגדר כל אחת מהשפות הבאות:

a. $\bar{L}_2$

$\{w \mid \#_1(w)\geq 5 \}$

b. $\bar{L}_3$

$\{w \mid \#_1(w)\neq 5 \} \cup \{w \mid \#_0(w) \neq 5\}$

ה. לכל אחת מהטענות הבאות נמק מדוע איננה נכונה:

a. $L1\cap L2=\emptyset$ המילה 110000 מופיעה בשתיהן

b. $\bar{L}_3$ מוכל ב $\bar{L}_4$

c. $L4^*L4\neq L4$ כי המילה הריקה מתקבלת ב L4 ולכן ...

d. $L5\cap L3=\emptyset$

תשס"ח 15

נגדיר את השפה L1 מעל הא״ב {a,c} $L1= \{c^n a^{n+2} | n>0\}$

לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b,c} $L= \{w_1\ w_2\ w_3 ......\ w_k b^k \mid k>0\ w_i \in L1\}$

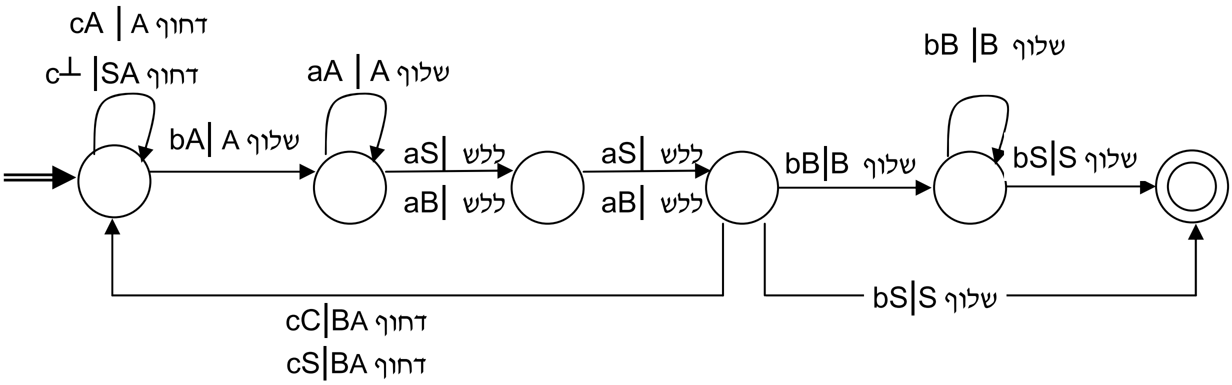
לדוגמה : המילה caaaccaaaacaaabbb היא מילה ב L כאשר k=3 וכן

W1= caaa w2=ccaaaa w3=caaa

בנה אוטומט מחסנית שיקבל את השפה L.

הרעיון : על כל c נכניס C על כל a נוציא C על ה a הראשון ללש ועל ה a השני נכניס B

על כל b נשלוף B .



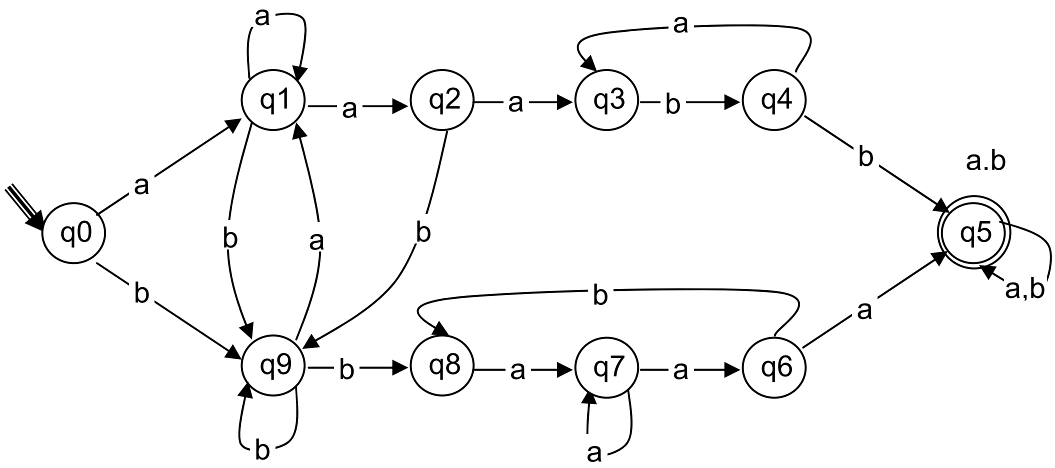
תשס"ח 16

כלבים חתולים ועכברים ... ראה אוטומט מכפלה.

תשס"ט 13

בתרגיל זו שני סעיפים א ו ב שאין קשר ביניהם. ענה על שניהם.

לפניך אוטומט סופי ;



קבע לכל אחת מהמילים שלפניך אם היא מתקבלת על ידי האוטומט.

אם המילה מתקבלת על ידי האוטומט רשום מסלול מקבל בעבור מילה זו.

babbaaa

aababaaa

aaabbba

כתוב את כל המילים הקצרות ביותר המתקבלות על ידי האוטומט.

נתונות השפות הבאות מעל הא״ב $\{a,b\}$

$L1=\{\ a^n\ b^k \quad n\neq k \quad n,k \geq 0\ \}$

$L2=\{\ b^i\ a^j \quad n\neq k \quad i \geq 0\ ,\ j \geq 1\ \}$

האם $L1 \cap L2$ רגולרית? נמק את תשובתך.

תשס"ט 14

1. מילה באורך 3 תיקרא פלינדרום באורך 3 אם התו הראשון במילה זהה לתו האחרון במילה. לדוגמה: המילה aba היא פלינדרום באורך 3.

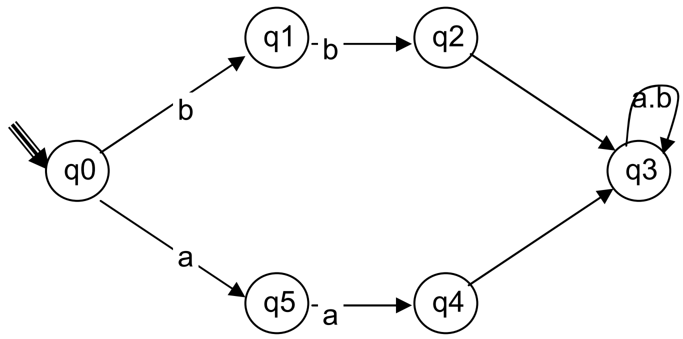
לפניך השפה L מעל ה א״ב {a,b}

L={w | w היא שרשור של 0 או יותר פלינדרומים באורך 3}

לדוגמה: המילה babbbbaba שייכת ל L

המילה bababb לא שייכת ל L

לפניך ציור חלקי של אס״ד המקבל את השפה L.



הציור מכיל את כל המצבים של האוטומט.

העתק למחברתך את הציור והשלם אותו כך שיקבל את השפה L

עליך להשלים את המעברים החסרים ואת סימני הקלט החסרים ולסמן את המצב המקבל/מצבים מקבלים.

שים לב: אין להוסיף מצבים לאוטומט או להוריד מצבים.

2. מהי השפה $\{L \cap (aab)^n \; n \geq 0\}$?

תשס"ט 15

נגדיר Σ^* כאוסף כל המילים מעל א״ב נתון, כולל המילה הריקה.

בעבור שפה L כלשהי נגדיר :

$Init(L) = \{u \mid uv \in L \quad u,v \in \Sigma^*\}$

$Fin(L) = \{v \mid uv \in L \quad u,v \in \Sigma^*\}$

$Min(L) =$

w Є L ובעבור כל w1 w2 המקיימות w=w1.w2 ו w2 אינה ריקה

w1 אינה שייכת ל L

לפניך 5 שפות מעל ה א״ב $\{0,1\}$

$L1=\{ 0^n 1^n 0^k 1^k \quad \mid n \geq 1 \;\; k \geq 0 \}$

$L2=\{ 0^n 1^k \quad \mid n \geq 0 \;\; k \geq 0 \}$

$L3=\{ 0^i 1^i \quad \mid i \geq 0 \}$

$L4=\{ 0^i 1^k \quad \mid k \geq i \geq 0 \}$

$L5=\{ 0^i 1^k \quad \mid i \geq k \geq 0 \}$

א. מהי השפה $L1 \cap L2$?

ב. מהי השפה $Init(L3)$?

ג. מהי השפה $Fin(L3)$?

ד. האם $0011 \in Min(L4)$?

ה. האם $0011 \in Min(L5)$?

ו. האם $L4 \cap L5$ רגולרית ?

תשס"ט 16

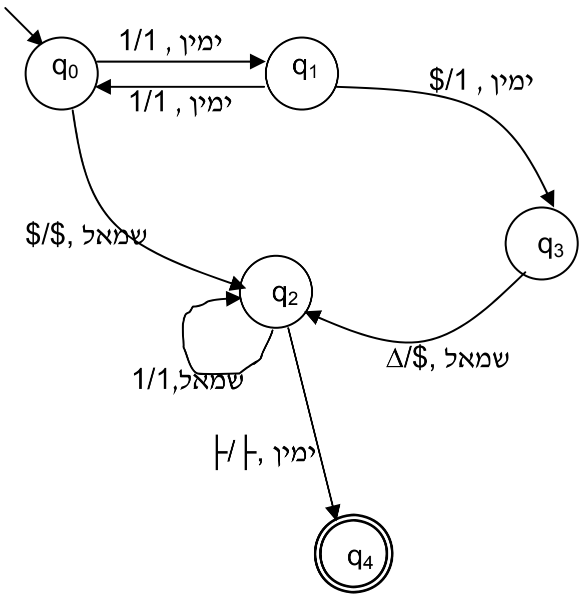
לפניך מכונת טיורינג המחשבת פונקציה f(x) . המכונה מקבלת כקלט מספר x גדול מ 0 שלם הרשום על הסרט

כמספר אונרי על ידי x תווים של 1 ואחריהם הסימן $.

לדוגמה בעבור x=4 יהיה סרט הזיכרון לפני תחילת החישוב:

├	1	1	1	1	$	Δ	Δ	...

המכונה רושמת את תוצאת החישוב של f(x) על הסרט כמספר אונרי, מיד אחרי הסימן +.



א. מה יכיל הסרט לאחר חישוב f(5) ? **את הערך 6**

ב. מה יכיל הסרט לאחר חישוב f(6) ? **את הערך 6**

ג. מהי הפונקציה f(x) שהמכונה מחשבת ? **1+ למספר אי זוגי ועצירה על תחילת המספר.**

תש"ע 13

לפניך שלוש שפות L1-L3 מעל הא״ב $\{a,b\}$

$L_1=\{a^nb^{n-1} \mid n\geq 1\}$

$L_2=\{a^nb^k \mid n\geq 0,k>0$ שארית החלוקה של k ב 2 שונה משארית החלוקה של n ב 2 $\}$

$L_3=\{a^kb^{2m} \mid k,m\geq 0$ i מתחלק בשלוש ללא שארית, k מתחלק בשלוש ללא שארית $\}$

א. לכל אחת מהשפות קבע אם היא רגולרית או אינה רגולרי. אם היא רגולרית בנה אס״ד מתאים ואם אינה רגולרית נמק את קביעותיך.

ב. לפניך השפות L4,L5 מעל הא״ב $\{a,b\}$

$L_4=\{a^nb^{n-1} \mid n\geq 1$ n אי זוגי $\}$

$L_5=L1^*R(L4)$

מהי L5

תש"ע 14

לפניך השפה L מעל הא״ב $\{0,\$\}$

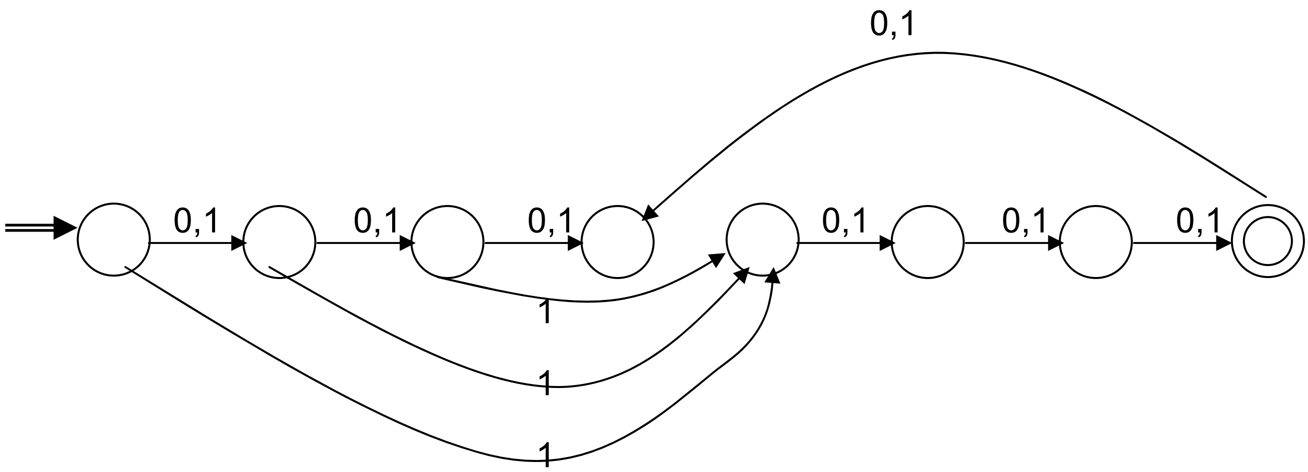
$L=\{0^3\$0^{i_1}\$0^{i_2}\$...0^{i_j}\$ \mid n\geq 1$ לכל m בין 1 ל j $i_m \geq 0$ ו i_m מתחלק ב 3 ללא שארית $k\geq 1\}$

א. כתוב את המילה הקצרה ביותר בשפה L.

ב. בנה אס״ד לשפה L.

תש"ע 15

א. לפניך אוטומט סופי לא דטרמיניסטי



1. קבע לכל אחת משלושת המילים הבאות האם היא מתקבלת בשפה או שלא.
2. אם המילה מתקבלת רשום מסלול עבור מילה זו.

a. 001001

b. 01010

c. 0101

3. מהו האורך המינימאלי של מילה המתקבלת על ידי האוטומט. תן דוגמה למילה כזו.
4. מהו האורך המקסימלי של מילה המתקבלת על ידי האוטומט. תן דוגמה למילה כזו.
5. מהי השפה המוגדרת על ידי האוטומט?

ב. לפניך השפה L מעל הא״ב {a,b}

הרצף aaa מופיע בדיוק פעם אחת . אין בה מופעים של הרצף aa פרט לאלה שב aaa ואין בה רצף של a ים שאורכו גדול מ 3.

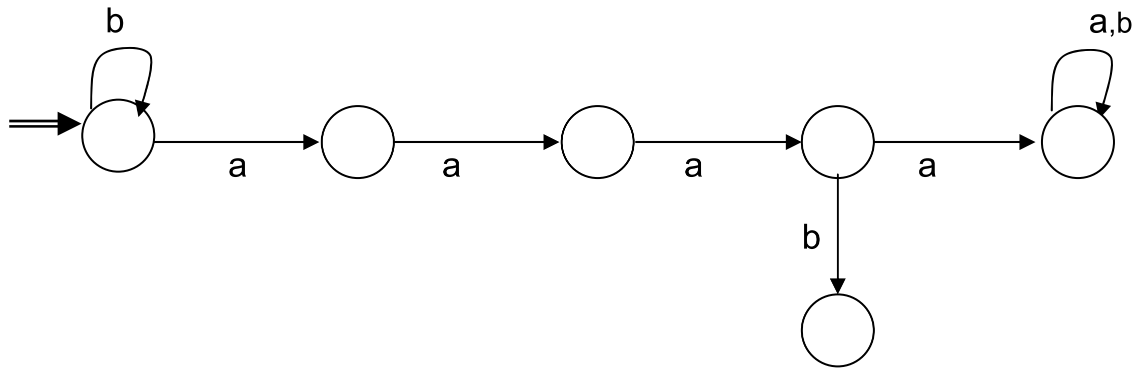
לדוגמה :

ababbaaabba שייך לשפה

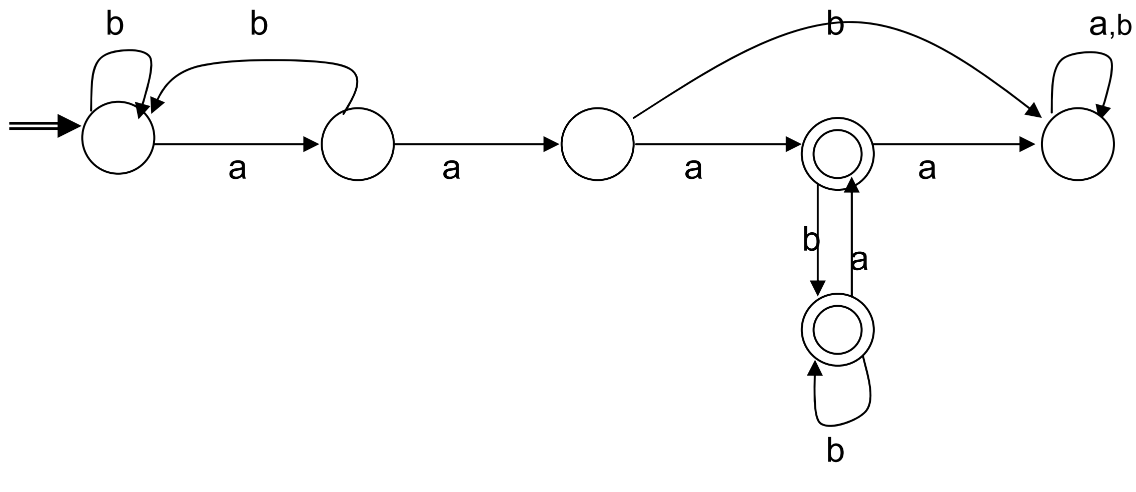
aaabbbabbab שייך לשפה

abaaabbaabba לא שייך לשפה

לפניך שרטוט חלקי של אס״ד המקבל את השפה L



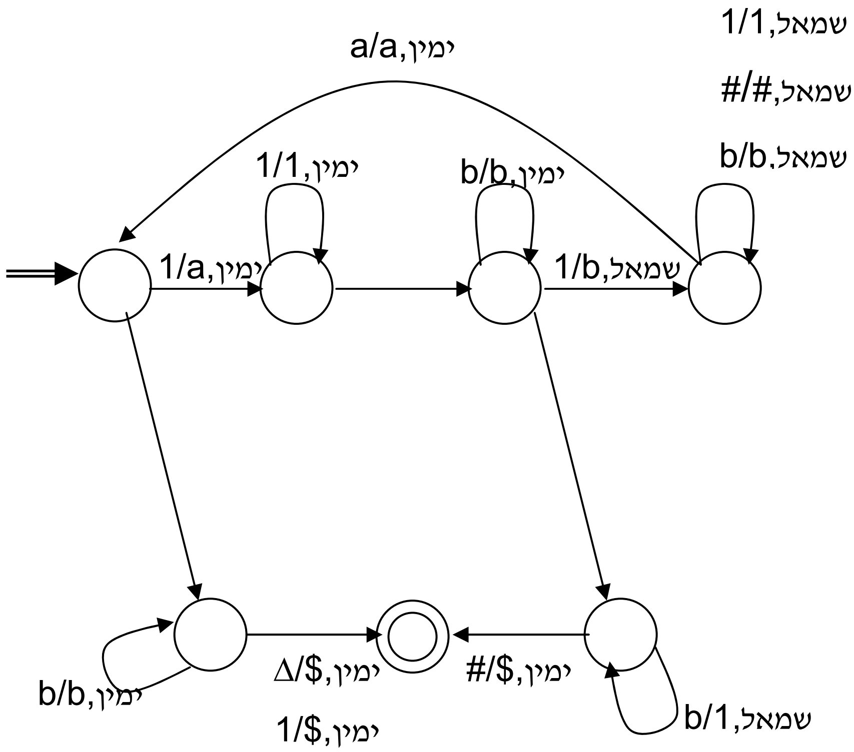
השרטוט מכיל את כל המצבים של האוטומט.
עליך להשלים את האוטומט ולסמן מה המצב המקבל.
הפתרון :



תש"ע 16

נתונה מכונת טיורינג המחשבת את הפונקציה $\min(x,y)$.

המכונה מקבלת שני מספרים אונריים המופרדים ב # והפלט ירשם כמספר אונרי בין שני סימני $. במהלך הפעולה המכונה יכולה להעזר בסימנים a,b. לפניך סרטוט חלקי של המכונה



א. בסרטוט יש 3 מעברים המסומנים באותיות א,ב,ג. העתק למחברתך את הסרטוט והשלם את שלושת המעברים.

ב. הראה את תהליך החישוב עבור $x=1$ $y=1$. בכל שלב רשום את מצב הסרט היכן נמצא ראש המכונה ובאיזה מצב המכונה נמצאת.

מקורות

חומר בקורס

http://cs.haifa.ac.il/courses/compilers/tutorials/Winter09_T01.pdf

תוכנית הלימודים במודלים-משרד החינוך

http://www.csit.org.il/default.aspx?MenuShow=DOCS&Doc_ID=58